數理思維

第九講：效用與非線性思考

聖彼得堡悖論 (St. Petersburg Paradox)

回顧上週談的Bernoulli問題：

遊戲規則：連續投擲硬幣，直到擲出正面為止。若第一次就擲出正面，就賺1元，若是在第二次擲出正面，就賺2元，若是第三次擲出正面，就賺4元，依此類推 — 若是第k次擲出正面，便賺2^{k-1}元。

問題：你願意付多少錢參加這個遊戲？

此問題引導出了「效用」的概念。

聖彼得堡悖論 (St. Petersburg Paradox)

如果我們接受「遊戲的期望值」是合理的價格，那麼這個「合理」的價格 ∞！因為這個遊戲的期望值是

$1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/8 + 8 \cdot 1/16 + \ldots = 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots = \infty$

當然，沒有人能夠，也沒有人願意拿出無窮多的錢來玩這個遊戲。Daniel Bernoulli發現他周遭的人平均只願意出2元來玩這個遊戲，他在1738年的一篇論文中提出極具說服力的解答，他的看法是人們的理性選擇不是期望值最大的選項，而是期望效用最大化的選項。

Daniel Bernoulli認為不同的金額有不同的「效用」，一個已經有1000元的人，再給他1000元，效用比第一個1000元要小，再加1000元的效用又會更小，依此類推。這就是經濟學裡的「邊際效用遞減原理」。

聖彼得堡悖論 (St. Petersburg Paradox)

Daniel Bernoulli認為一個已經有1000元的人，再給他1000元，其效用與給一個已經有10000元的人10000元相當。如果用函數表示不同金額的效用，這個函數，稱為效用函數，與對數函數 log 類似（邊際效用遞減表示效用函數為下凹的函數，具有上述性質的函數一定是 log 的常數倍）。前面遊戲的期望效用是

$$1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/8 + 4 \cdot 1/16 + \ldots = 1/2 + 2/4 + 3/8 + 4/16 + \ldots = 2$$

最後的等式可以由下面的列表看出：

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots = 1$$
$$1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots = 1/2$$
$$1/8 + 1/16 + \ldots = 1/4$$
$$\ldots\ldots$$

右邊累加的值為2，完美說明了為何他周遭的人平均願意出2元玩這個遊戲！

期望效用函數理論

Bernoulli的理論，在20世紀中被馮．紐曼和摩根斯坦(Von Neumann and Morgenstern)公理化，運用邏輯和數學工具建立了有不確定性的情形下理性行為人的決策理論，被稱為期望效用函數理論。這套理論對許多不符合最大期望值的行為提供了十分有說服力的解釋。

利用期望效用函數理論，我們可以把風險量化為期望效用的可能損失，而非期望值的可能損失。

艾爾斯伯格悖論 (Ellsberg Paradox)

期望效用函數理論 (Expected utility theory, EUT)經過許多修正，經濟學家艾爾斯伯格 (Daniel Ellsberg, 1931~2023)在1961年提出一個著名的挑戰。

Source: Wikipedia

艾爾斯伯格提出的理論與分析成為他1962年哈佛大學的博士論文，當時他被認為是決策理論的新星，1964年起被延攬至五角大廈為美國軍方工作，1971年因為洩漏軍方情報(Pentagon Papers)給時代雜誌、華盛頓郵報等媒體而被起訴115年徒刑，1973年被判無罪。

艾爾斯伯格悖論 (Ellsberg Paradox)

遊戲規則：一個不透明箱子裡有90個小球，其中有30個紅球，其餘的球有黑有黃，數目不確定。你可以在下面的選項中擇一，然後抽一個球。

A. 以下兩個選項，你要選哪一個？
1. 紅球：選出的是紅球，則獲得100元
2. 黑球：選出的是黑球，則獲得100元

B. 以下兩個選項，你要選哪一個？
1. 非紅球：選出的不是紅球，則獲得100元
2. 非黑球：選出的不是黑球，則獲得100元

艾爾斯伯格悖論 (Ellsberg Paradox)

令u(x)為決策x的期望效用。艾爾斯伯格的實驗顯示：
在A中，多數人選「紅球」，表示 u(黑球)<u(紅球)
在B中，多數人選「非紅球」，表示 u(非黑球)<u(非紅球)

若考慮「紅球與非紅球」，期望效用是 u(紅球)+u(非紅球)
若考慮「黑球與非黑球」，期望效用是 u(黑球)+u(非黑球)

所以 u(黑球與非黑球) = u(黑球)+u(非黑球)
< u(紅球)+u(非紅球) = u(紅球與非紅球)

這是個矛盾，因為「紅球與非紅球」=「黑球與非黑球」！

風險心理

艾爾斯伯格悖論說明了期望效用函數理論 (EUT) 有明顯的侷限，當人們面對知道期望值與不知道期望值的兩個選項時，人們傾向於選擇知道期望值的選項（比較確定的不確定選項）。這顯示了人類具有迴避不確定性的心理傾向。

下面我們再看一個實驗，反映人類另一個關於風險的心理傾向。

風險心理

假設有一種病毒入侵台灣，估計會造成600人死亡，衛生署委託流行病學專家研擬對策，有A、B兩個方案被提出...

（版本一）
若採用A方案，將可救回200人的性命
若採用B方案，有1/3的機率可以救回所有600人的性命，但有2/3的機率是這600人都無法挽救

現在，作為一個好國民，你希望選擇哪一個方案？

實驗結果: 約80%的人選方案A

風險心理

假設有一種病毒入侵台灣，估計會造成600人死亡，衛生署委託流行病學專家研擬對策，有A、B兩個方案被提出...

（版本二）
若採用A方案，將會造成400人死亡
若採用B方案，有1/3的機率沒有任何人死亡，有2/3的機率是這600人都會死亡

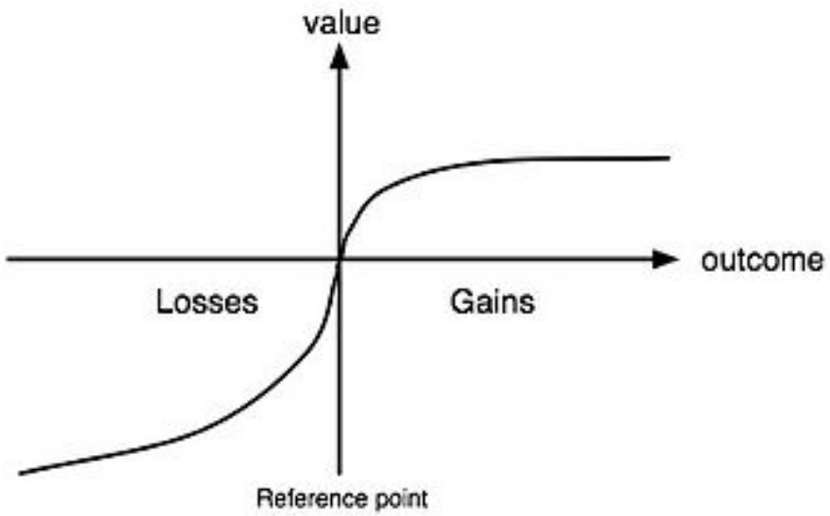
現在，作為一個好國民，你希望選擇哪一個方案？

實驗結果: 約56%的人選方案A

風險心理

上面實驗顯示，邏輯上等價（期望值一樣）的敘述，可以因為採用正面 (收益) 或負面 (損失) 敘述而導致不同結果；人們面對收益時，傾向於迴避風險，面對損失時，傾向於冒險。此現象在心理學上稱為「框架效應」(framing effect)。

我們前面提到，根據邊際效用遞減原理，效用函數是一個向下凹的函數，而框架效應則告訴我們，面對損失時，效用函數應該是一個向上凹的函數。解釋此現象(修正EUT)的一個行為經濟理論，稱為前景理論 (prospect theory, Daniel Kahneman and Amos Tversky 1979)。



Utility curve — from Wikipedia "Prospect theory"

風險量化：Beta係數

現在我們進一步談風險的量化，經濟學裡有一個被廣泛接受與應用的風險量化指標，稱為Beta係數。

假設我們有兩組隨時間變動的資料，例如金價與油價，考慮兩個數學概念：變異數(variance)、共變異數(covariance)

變異數：Var(金)是金價波動程度的度量

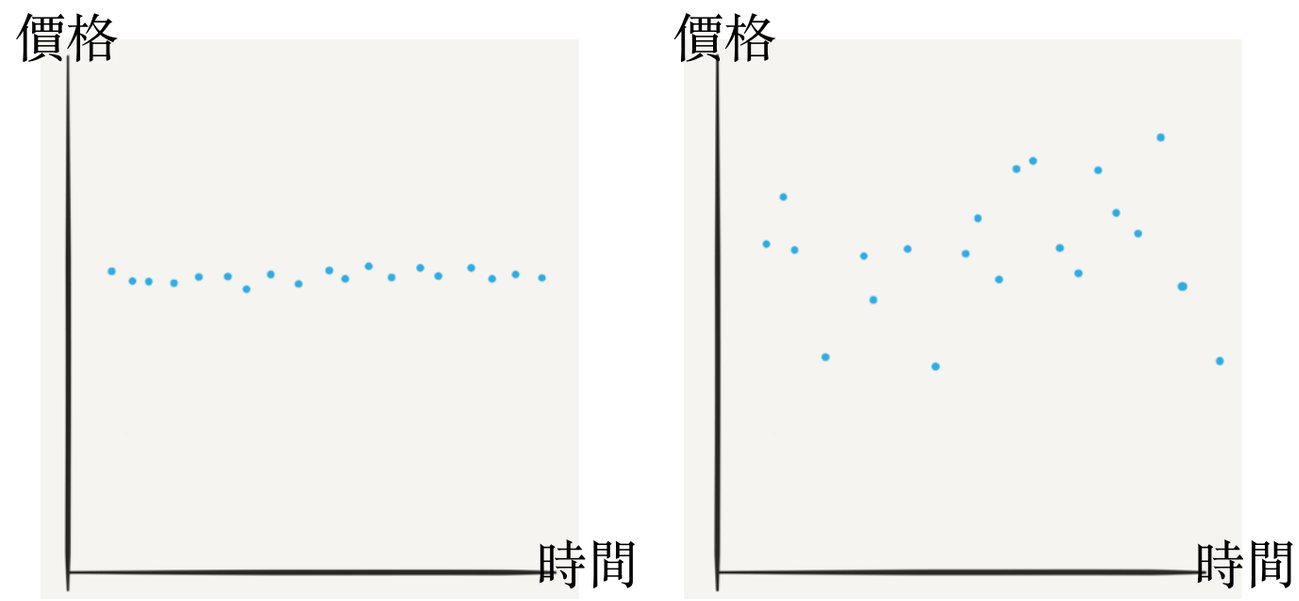
共變異數：Cov(金,油)是金價油價整體波動程度的度量

稍微詳細一點地說，Var(金)是金價與其均價差的平方之平均值，Cov(金,油)則把金價與其均價差乘上油價與其均價差，再取平均。（我們略過更精確的定義）

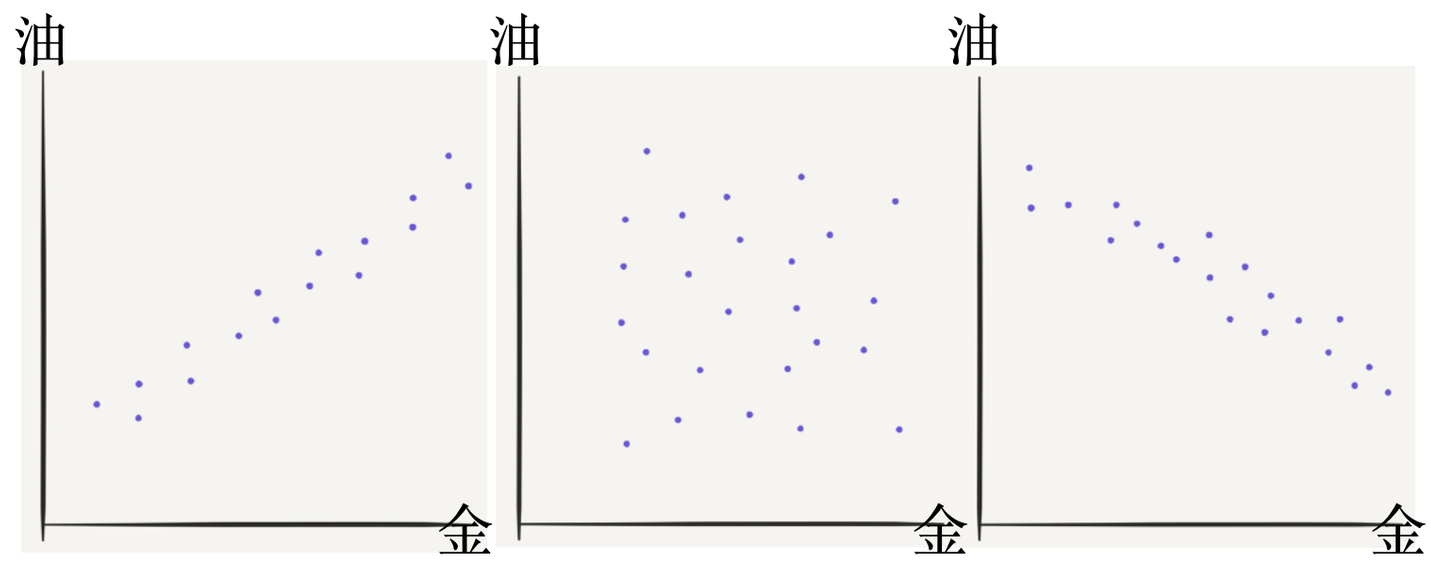
風險量化：Beta係數

我們用示意圖說明：

左圖變異數小，右圖變異數大



左圖共變異數為正(正相關)，中圖共變異數接近零(不相關)，右圖共變異數為負(負相關)



風險量化：Beta係數

給定一特定資產A（例如股票），先選定一價格穩定的資產B作為基準（例如國債），資產A的Beta係數定義為

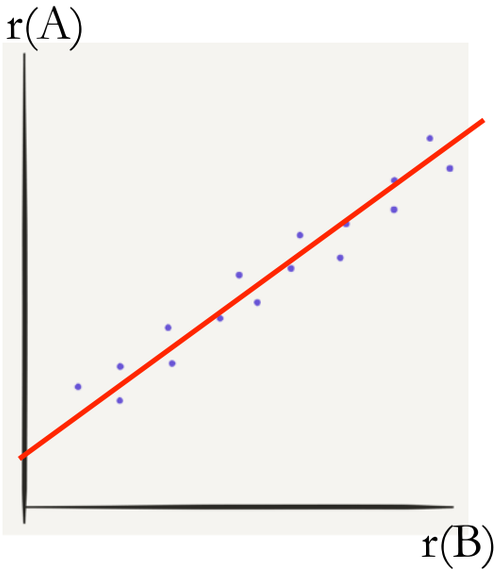
$$\beta = \mathrm{Cov}(A,B)/\mathrm{Var}(B)$$

大概地說，β 是相較於穩定收益的資產B，資產A價格浮動的程度，β 越大表示風險越大，β =1表示風險與B相同。

在實務上，β 的計算是利用資產B與資產A的過去收益r(B)、r(A)紀錄，用直線去近似

$$r(A) \approx \alpha + \beta\, r(B)$$

這在數學上稱之為線性回歸(linear regression)



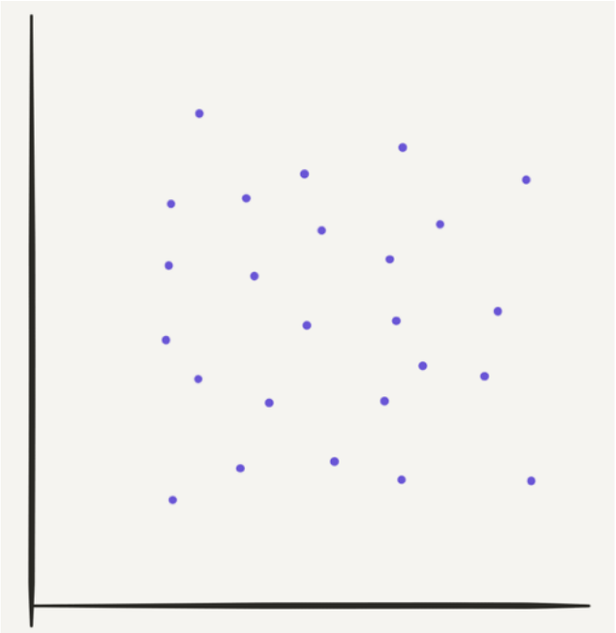
風險量化：Beta係數

Beta係數的主要應用是資本資產的定價(Capital Asset Pricing Model, J. Treynor 1961~, W. F. Sharpe 1964, J. Lintner 1965, J. Mossin 1966)，是許多大型投資公司或銀行對其資產配置的主要依據。

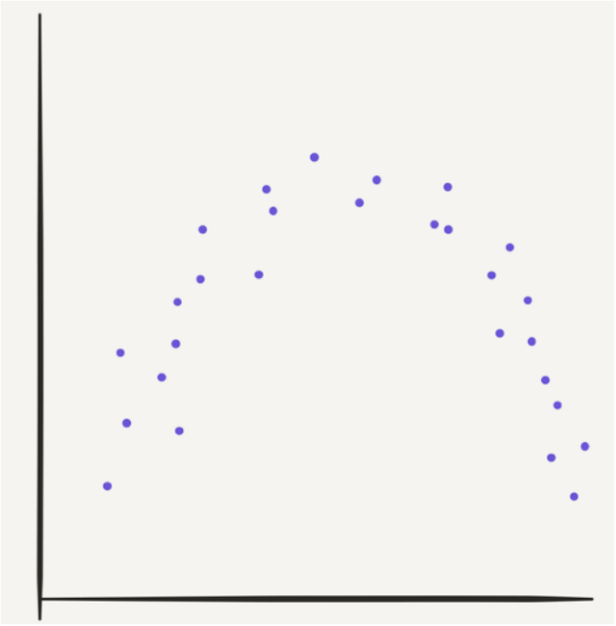
這個量化風險方法，對於其他決策的風險（失業率、治安、醫療...）評估，提供了很好的啟發。

線性思考的侷限

Beta係數的內涵，是一種線性思考，隱含了被評估的資產與一個穩定的基準（如上面說的國債）有一個近似線性的關係。如果兩組資料的關係如右圖呢？



真實世界中，線性思考常常被濫用在不合適的資料上，媒體上也常出現隱含線性思考的錯誤報導或預測。



實例一：減稅救經濟？

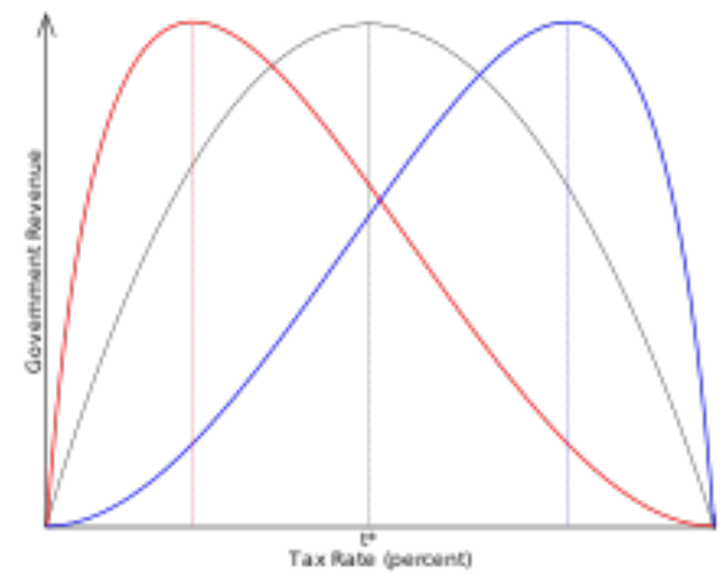
選舉期間，許多政治人物會提出「減稅救經濟」的主張。這是討好選民騙選票，還是真有道理？

美國雷根總統、布希總統任內都推行過減稅政策，現任總統川普也有提出減稅的政見。減稅救經濟的主要論點是減稅能增加個人與家庭的消費能力，藉此刺激經濟。

2008年，臺灣工業總會在媒體上強打減稅刺激經濟的廣告，希望藉此影響輿論與國家政策，引發公平租稅聯盟與賦改會的不滿，檢舉該廣告涉及詐欺。

實例一：減稅救經濟？

假設某個國家A最高稅率60%，降低5%後國家稅收提升5%，另一個國家B最高稅率30%，降低5%後國家稅收可能反而減少10%，原因是稅率與稅收的關係是非線性相關的，被稱為拉弗曲線 (Laffer curve)。



Laffer curve from Wikipedia

拉弗曲線的背後道理很簡單：如果零稅率，總稅收為零，如果課徵100%的稅，沒有企業能生存，總稅收還是零，所以稅率與總稅收不可能線性相關！

從拉弗曲線可看出，減稅刺激經濟只在高稅率國家適用。

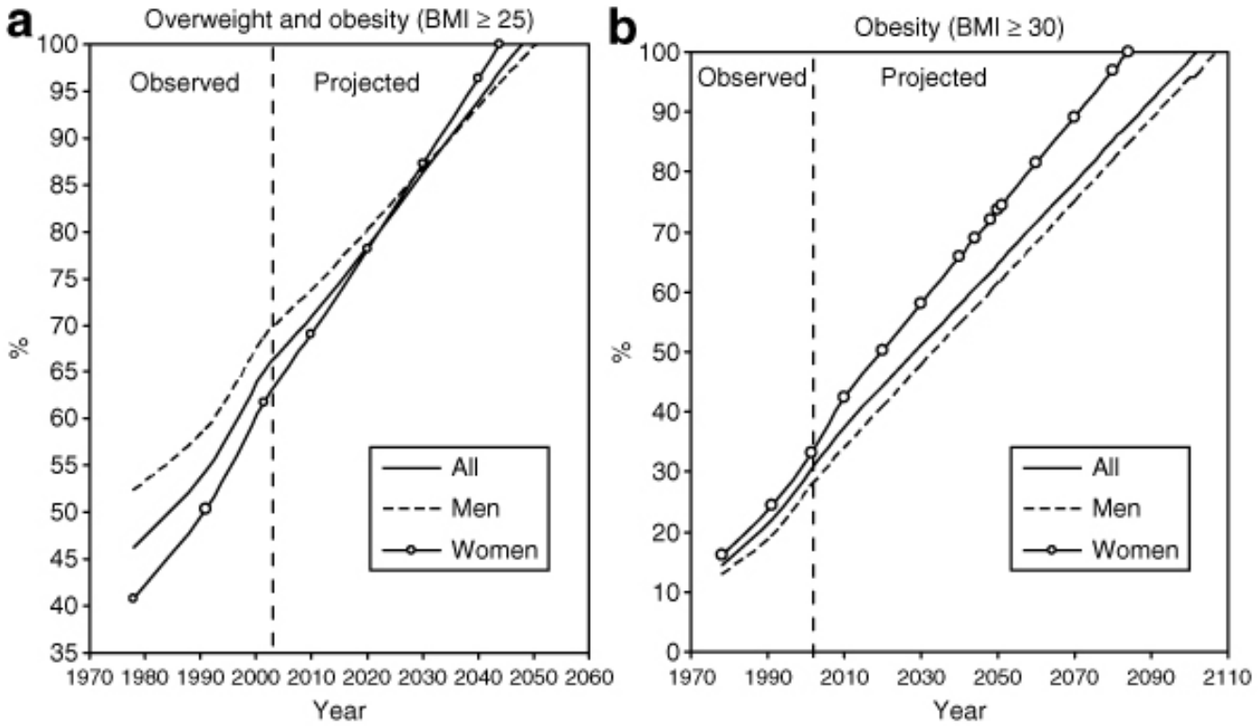
實例一：減稅救經濟？

實際上，美國雷根總統的減稅政策使美國從全世界最大債權國轉為最大借債國，並加大通貨膨脹與貧富差距(Washington Post, 2004/6/9)，布希總統的減稅政策使得美國的赤字十年內增加了1.8兆美元(from Wikipedia)，經濟學家Paul Krugman對其評論 (Pending Prosperity: Sense and Nonsense in the Age of Diminished Expectations, 1995)：

> "… supply-side adherents did not fully believe that the United States income tax rate was on the "backwards-sloping" side of the curve and yet they still advocated lowering taxes to encourage investment of personal savings."

實例二：所有人都變胖子？

2008年，發表在Obesity雜誌的一篇文章，利用線性回歸研究過去幾年的統計數字，預測到了2048年，所有美國人都會過重，其圖形如右。



From “Obesity” 2008

這個研究被多個媒體引用，向大眾提出“肥胖警示”。

該項研究還指出，美國黑人的過重趨勢較為緩慢，預計2095年才會全部過重。

實例二：所有人都變胖子？

問題來了：2048年沒有過重的美國黑人都哪裏去了？！

From “Obesity” 2008

這項研究出現明顯的矛盾，原因就在於誤用線性思考：直線是曲線的局部逼近（在微積分裡，我們會說切線方程是函數的一次逼近），用作長期預測則毫無意義。

Recommended Readings (☞ Required)

1. Jordan Ellenberg: “How Not to Be Wrong: The Power of Mathematical Thinking”, Penguin Group USA, 2014. (中譯本名稱:《數學教你不犯錯》，天下文化，2016.) 第1~5章
2. ☞ M. Buchanan: The Social Atom - Why the Rich Get Richer, Cheaters Get Caught, and Your Neighbor Usually Looks Like You, Bloomsbury USA, 2007. 中譯本:《隱藏的邏輯》, 天下遠見, 2007. 第八章