

數理思維

第五講：知識與邏輯

知識

定義：**知識**是被證實為真實的信念（柏拉圖，JTB理論）

我們說某人 S 知道某個命題 P，若且唯若，以下三個條件皆成立：

1. P 為真 (true)
2. S 相信 P (believe)
3. S 對 P 的信念是合理的 (justified)

挑戰與修正：葛梯爾問題 (Gettier Problem)

常識(general knowledge)是一般社會上智力與教育程度正常的人應有的知識

知識哲學/認識論

基礎論 (Foundationalism):

有些基本命題不需證明

eg. 歐式幾何、非歐幾何

融貫論 (Coherentism):

命題是非決定於是否與被接納的其他命題衝突

粒子物理

懷疑論 (Skepticism):

任何命題均可被質疑

後現代主義

共有知識與共同知識

邏輯學上對於「知識」的討論，有兩個與「常識」接近的概念，稱為「共有知識」與「共同知識」

定義：（邏輯學）給定一群體

共有知識(mutual knowledge)是所有參與人知道的知識 (S.Schiffer 1988)

共同知識(common knowledge)所有人知道，所有人知道其他人知道，所有人知道其他人知道其他人知道.....的知識
(D.K.Lewis 1969)

「共有知識」與「共同知識」表面上差別不是太大，但實際上差別非常大。這兩個概念被應用在法律、政治、語言學等領域。

共有知識與共同知識

例如「地球繞著太陽轉」是我們都知道的常識，而且我知道你們都知道，你們也知道我知道你們知道.....，所以是「共同知識」。

有些知識可能我們都知道，例如「水星是離太陽最近的行星」，但我們不能肯定其他人都知道，或是不能肯定其他人都知道其他人知道.....。這類「常識」的普及率稍微低一些，是「共有知識」而非「共同知識」。

例一：國王的新衣（安徒生童話）

在「國王的新衣」這個故事的最後，所有人都看到國王沒有穿衣服，所以「國王沒有穿衣服」是共有知識，但人們不能肯定別人是否知道，或者不能肯定別人是否知道自己知道...



在小孩喊出「國王沒有穿衣服」之後，所有人都大笑，表示這個共有知識已經成為共同知識。

例二：農夫困境 (D. Hume, 1740)

回顧農夫困境：

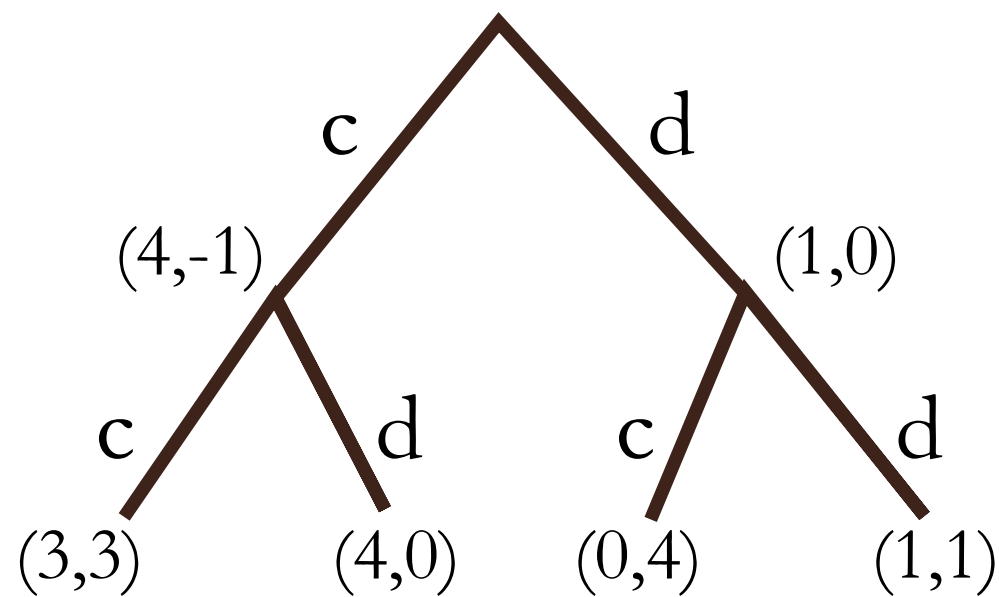
有甲乙兩個相鄰的農家，他們理性、自私、沒有感情。他們的作物收成時間錯開三個月，如果沒有鄰居農家幫忙收莊稼，就會來不及採收，一半莊稼爛在田裏；反之，如果合作，就可以全數採收。

假設全數採收的那方獲利是 4，半數採收的獲利是 1，幫助對方的勞力成本是 1（獲利是 -1），為自己採收不計勞力成本。

我們考慮雙方共採收任意次。

例二：農夫困境 (D. Hume, 1740)

我們將「合作」標示為「c」，「拒絕」標示為「d」，考慮雙方採收多次，某一次要由乙農家決策，然後甲，然後乙...，從這一次開始形成一個由 c 和 d 構成的序列，現在用樹狀圖， (x,y) 表示(甲,乙)從這次算起的收益：



知識系統：

- (1) 甲乙兩人都理性 (排除低收益選項)
- (2) 甲乙兩人都知道收益樹狀圖

若(1)(2)是共有知識，dd非必然結果
若(1)(2)是共同知識，dd是必然結果

例三：藍眼睛島謎團

從前有一個神秘的島嶼，住著一個神秘的部落，部落裏有200個人，這些人邏輯推理能力都極為迅速且完美，也知道其他人完美的邏輯推理能力。他們之中有100個人眼睛是藍色，100個人眼睛是棕色。部落裏有個古怪的規定：不許討論任何人眼睛的顏色，不許知道自己眼睛的顏色，任何島民只要知道自己眼睛的顏色，就必須在當天午夜離開小島。所有島民都嚴格遵守此規定。

有一天一個有藍色眼睛的外國人來到島上，得到部落的熱情招待與信任。臨走的那天傍晚，他對全島居民表達他的感激，並無意中說了一句話：「能夠在這裏看到與我眼睛顏色一樣的人真是神奇」。

請問這句話對島民產生什麼樣的影響？

例如：過1天、10天、100天、200天後的那天中午島上有幾人？

遊戲：牌色推理（規則於課堂宣布）

以三人為例，假設有 2 紅 1 黑

一開始「有人拿紅牌」是共有知識，不是共同知識

我宣布「有人拿紅牌」後，「有人拿紅牌」成為共同知識

此時「有二人拿紅牌」不是共有知識

第一輪答題完後，「有二人拿紅牌」成為共同知識，拿紅牌者知道自己牌色

此時「恰好二人拿紅牌」不是共有知識

第二輪答題完後，「恰好二人拿紅牌」成為共同知識，且每個人都知道自己的牌色

遊戲：牌色推理（規則於課堂宣布）

上面遊戲將二人推廣至三人，三人推廣至四人.....的推理過程，用了窮舉法與數學歸納法。我們可以觀察到：

假設所有人都不知道自己的牌的顏色，有 n 個人拿到紅牌， m 個人拿到黑牌。已知至少有一張紅牌的情形下，在第 $n-1$ 次推理答題後，所有拿紅牌的人都應該知道自己的牌色，在第 n 次推理答題後，所有拿黑牌的人都應該知道自己的牌色。

經過 $n-1$ 次推理答題，「有 n 個人拿到紅牌」成為共同知識。

經過 n 次推理答題，「恰有 n 個人拿到紅牌」成為共同知識。

回到「藍眼睛島謎團」，從上面的遊戲（牌色換成眼色）我們得到：1～99天後的那天中午島上仍然有200人，100天後的那天中午島上剩100人，101天後的那天中午已經是個無人島了！

小組討論：類似的牌色推理遊戲

有甲乙 2 人參與，各拿 2 張牌，2 人邏輯推理能力都完美。假設甲拿 2 紅，乙拿 1 紅 1 黑，他們只能看自己的牌，能聽到對方答覆。

第一階段：我宣布「至少有兩張紅牌」

第二階段：我詢問甲是否知道對方的牌，甲誠實答覆

第三階段：我詢問乙是否知道對方的牌，乙誠實答覆

第四階段：我宣布「至少有三張紅牌」

第五階段：我詢問甲是否知道對方的牌，甲誠實答覆

第六階段：我詢問乙是否知道對方的牌，乙誠實答覆

第七階段：我宣布「恰好有三張紅牌」

問題：「甲不是 2 黑」、「乙至少有 1 紅」、「甲拿 2 紅」各自在哪一階段結束後成為共有知識？在哪一階段結束後成為共同知識？

Recommended Readings (👉 Required)

- 👉 1. “Wireless philosophy — Common Knowledge #1, #2”
https://www.youtube.com/watch?v=BdpZZc6r_2o
<https://www.youtube.com/watch?v=3Mviz0caJ-Y>
2. Stanford Encyclopedia of Philosophy 條目 「Common knowledge」
3. “The blue-eyed islanders puzzle” in Terence Tao’s blog (<https://terrytao.wordpress.com/2008/02/05/the-blue-eyed-islanders-puzzle/>)
4. Littlewood 1953 “A Mathematician’s Miscellany”, Cambridge University Press