

數理思維

第三講：理性與人性

海盜博弈 (I. Stewart, 1999)

有五個理性而自私的海盜，A,B,C,D和E，發現了100個金幣，需要想辦法分配金幣。

海盜們有嚴格的等級制度：A比B職位高，B比C高，C比D高，D比E高。海盜世界的分配原則是：等級最高的海盜提出一種分配方案。所有的海盜投票決定是否接受分配，包括提議人，並且在票數相同的情況下，提議人有決定權。如果提議通過，那麼海盜們按照提議分配金幣。如果沒有通過，那麼提議人將被扔出船外，然後由下一個最高職位的海盜提出新的分配方案。

現在你是海盜A，你要如何分配？

海盜博弈 (I. Stewart, 1999)

有五個理性而自私的海盜，A,B,C,D和E，發現了100個金幣，需要想辦法分配金幣。

海盜們有嚴格的等級制度：A比B職位高，B比C高，C比D高，D比E高。海盜世界的分配原則是：等級最高的海盜提出一種分配方案。所有的海盜投票決定是否接受分配，包括提議人，並且在票數相同的情況下，提議人有決定權。如果提議通過，那麼海盜們按照提議分配金幣。如果沒有通過，那麼提議人將被扔出船外，然後由下一個最高職位的海盜提出新的分配方案。

現在你是海盜A，你要如何分配？

答案：用逆推法.....

海盜博弈 (I. Stewart, 1999)

如果只剩下D和E，則D：100，E：0。因為D有決定權，所以分配達成。

如果剩下三個人(C,D,E)，C知道D下輪會給E 0個金幣，所以C這輪給E 1個金幣，讓E支持自己以使得提議通過。因此結果是C：99，D：0，E：1。

如果剩下B,C,D,E，B知道上述結果，所以為了避免被扔出去，他只需要給D 1個金幣，因為他有決定權，只需要D的支持就足夠了。因此他會提議 B：99，C：0，D：1，E：0。

假設A知道所有的一切，他就應該選擇讓C和E來支持他，提議變成 A：98，B：0，C：1，D：0，E：1。

理性自私與人性互助

定義： **理性**是指依據事實進行邏輯推理的思考或行為方式

贏者全拿的遊戲/競爭：首長選舉、工程競標、商品代理權、商場經營權等。

海盜博弈接近於贏者全拿

贏者全拿 $\Rightarrow$ 鼓勵理性而自私的決策方式，不利於建立合作

問題：理性自私的後果？互助社會如何形成？

完全理性

定義： **完全理性**(perfect rationality)指一種行為方式，在給定的條件下，其行動經由推理被正確地設計以獲得最大成功

完全理性的意涵：知道所有可選方案、各方案的成本都可知並有確定效益、等價敘述不影響選擇結果、行為人有完備的計算推理能力、有確定的結果

傳統經濟學將完全理性作為基本假設；也就是說，行為人的決策完全以利益最大化為準則，若行為人的選擇沒有實現利益最大化，則其行動為不完全理性。

有限理性

實際問題中，常因給定的條件太複雜，資訊不完整，或是能夠推理與決策的時間不足，人們無法依照完全理性的方式來行動。一個比完全理性弱一點的概念是「有限理性」

定義： **有限理性** (bounded rationality) 是指一種受限於給定資訊、處理難度、個人認知、以及時間限制的部份理性行為方式 (Herbert A. Simon 1957)

下面幾個例子，儘可能完全理性，使利益最大化。

囚徒困境 (M. Flood, M. Dresher, A. Tucker, 1950)

警方逮捕甲乙兩名嫌疑犯，但沒有足夠證據指控二人有罪，於是警方分開囚禁嫌疑犯，分別和二人見面，並向雙方提供相同選擇：若一人認罪並作證指控對方(稱之為「背叛」對方)，而對方保持沉默，此人將立刻獲釋，沉默者將判監10年。若二人都保持沉默(互相「合作」)，則二人同樣判監半年。若二人都互相檢舉(互相「背叛」)，則二人同樣判監2年。

假定每個參與者(囚徒)都是利己的，亦即各自尋求自身最大利益，而不關心另一參與者的利益，則最後結果為何？

囚徒困境 (M. Flood, M. Dresher, A. Tucker, 1950)

	乙沉默（合作）	乙認罪（背叛）
甲沉默（合作）	二人同服刑半年	甲服刑10年,乙獲釋
甲認罪（背叛）	甲獲釋,乙服刑10年	二人同服刑2年

上面四種結果可以用矩陣表示，稱之為**收益矩陣**：

	乙沉默（合作）	乙認罪（背叛）
甲沉默（合作）	-0.5, -0.5	-10, 0
甲認罪（背叛）	0, -10	-2, -2

若對方沈默，我認罪會讓我獲釋，所以會選擇認罪。

若對方認罪，我也要認罪才能得到較低刑期，所以也選擇認罪。二人面對的情況一樣，所以二人都會選擇認罪。

自私（選擇(-2,-2)）是「個體」理性的選擇，但不是總體利益最大化。

囚徒困境 (M. Flood, M. Dresher, A. Tucker, 1950)

現在考慮重複囚徒困境十次。

如果囚徒第一次被對方指控，第二次這個囚徒也會指控對方；
如果第一次別人保持沉默，建立了互信的關係，你也會保持沉默。

兩個囚徒會有相似想法，在第一局保持沉默，以期建立互信，
所以雙方都會保持沉默。第二局雙方應有相似想法，繼續保持
沉默以期繼續在互信的情況下進行第三局...。到第十局時，互
信的關係已經沒有意義了，因為沒有下一局，不必再為維持互
信而沉默，所以囚徒會選擇背叛對方，理由和只有一局的囚徒
困境一樣。

囚徒困境 (M. Flood, M. Dresher, A. Tucker, 1950)

既然雙方都知道在第十局，無論如何對方都會背叛自己，在第九局保持沉默也就沒有意義了，因為保持沉默的目的是為了希望下一局對方保持沉默，所以第九局雙方都會選擇背叛。雙方都有相同的想法，知道第九局對方會背叛自己，所以第八局保持沉默也是沒有意義的，第七局亦然...。於是雙方自始至終都背叛對方。

自私（每一局都選擇 $(-2, -2)$ ）仍然是「個體」理性的選擇，但總體利益沒有最大化。

旅行者困境 (K. Basu, 1994)

航空公司丟失了兩位互相不認識乘客的旅行包。兩個旅行包正好都是一樣的，並且裡面有相同價值的古董，兩位乘客都向航空公司索賠100美元。

為了評估出古董的真實價值，公司經理將兩位乘客分開以避免兩人合謀，分別讓他們寫下古董的價值，其金額要不低於2美元，並且不高於100美元。同時還告訴兩人：如果兩個數字是一樣的，那麼會被認為是其真實價值，他們能獲得相應金額的賠償。如果數字不一樣，較小的會被認為是真實價值，而兩人在獲得這個金額的同時有相應的獎賞/懲罰：寫下較小金額的會獲得2美元額外的獎勵，較大的會有2美元的懲罰。

若你是旅行者之一，你要如何決定應該寫下的金額？

旅行者困境 (K. Basu, 1994)

收益矩陣：

	100	99	98	97	...	3	2
100	100, 100	97, 101	96, 100	95, 99	...	1, 5	0, 4
99	101, 97	99, 99	96, 100	95, 99	...	1, 5	0, 4
98	100, 96	100, 96	98, 98	95, 99	...	1, 5	0, 4
97	99, 95	99, 95	99, 95	97, 97	...	1, 5	0, 4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
3	5, 1	5, 1	5, 1	5, 1	...	3, 3	0, 4
2	4, 0	4, 0	4, 0	4, 0	...	4, 0	2, 2

如果對方選100，我選99最有利，但對方也會這麼想，也選99，那我應該選98才對，但對方也會考慮這點而選98，所以我應該選97...以此類推，則理性而又自私的選擇是 (2,2)，離總體利益最大化相去甚遠！

實驗結果：大多數測試者選擇接近100美元。

農夫困境 (D. Hume, 1740)

有甲乙兩個相鄰的農家，他們理性、自私、沒有感情。他們的作物收成時間錯開三個月，如果沒有鄰居農家幫忙收莊稼，就會來不及採收，一半莊稼爛在田裏；反之，如果合作，就可以全數採收。

假設全數採收的那方獲利是 4，半數採收的獲利是 1，幫助對方的勞力成本是 1（獲利是 -1），為自己採收不計勞力成本。再假設甲農家先採收，你是乙農家，那麼你要不要幫對方採收？

可考慮以下四種情況：

1. 甲農家採收一次，乙農家不採收
2. 雙方各採收一次，也就是共採收兩次
3. 雙方共採收三次
4. 雙方共採收四次

農夫困境 (D. Hume, 1740)

這個例子與囚徒困境不同，因為甲乙決策有時間順序，比較接近重複的囚徒困境（賽局理論裏稱之為「動態」）。我們將「合作」標示為「c」，「拒絕」標示為「d」，乙農家先決策，然後甲，然後乙...，形成一個由 c 和 d 構成的序列（賽局理論裏通常用樹狀圖表示）。

我們不妨將相鄰兩項稱為：

「cc」=「投桃報李」 「cd」=「過河拆橋」 「dd」=「以牙還牙」
「dc」=「以德報怨」（既然理性、自私、沒有感情，我們排除 dc）

若甲農家採收一次，乙農家退休，完全不再採收，那自私的乙農家不可能幫忙，甲農家獲利必然是 1。

農夫困境 (D. Hume, 1740)

若雙方各採收一次，可能情況有：

對乙來說，最大可能獲利為 3，他必須

先合作，但自私的甲定會過河拆橋，所以乙應該選擇拒絕

合作拒絕序列	cc	cd	dd
(甲,乙) 獲利	(3,3)	(4,0)	(1,1)

雙方共採收三次可看作前兩者的結合，以相互拒絕收場。若總共採收四次為例，可能情況如右：

對乙來說，最大可能獲利為 6，

前提是他必須合作兩次，但自私的甲定會在乙合作兩次後過河拆橋，所以乙第二次應該拒絕，但是甲會想到乙會如是想，已知乙第二次會拒絕，甲會選擇第一次就拒絕，乙想到甲會如是想，第一次收成時就拒絕他，所以乙一開始就選擇拒絕

合作拒絕序列	cccc	cccd	ccdd	cddd	dddd
(甲,乙) 獲利	(6,6)	(7,3)	(4,4)	(5,1)	(2,2)

依此類推，無論雙方共採收幾次，甲乙兩家會自始至終拒絕對方

賽局理論

定義：賽局理論（博弈論）是研究理性行為人在利益衝突下決策方式的數學理論（Zermelo 1913, Borel 1921, von Neumann 1928）

囚徒困境、旅行者困境、農夫困境的共同特質：

1. 參與者不能在決策前協商
2. 最後「理性自私」的解，參與者無法藉由單方面改變決策而受益

具有性質 1 的「局」稱為**非合作賽局**，在非合作賽局中具有性質 2 的解稱為**納許均衡解** (Nash equilibrium)

前面幾例「理性而自私」的解，都是納許均衡解。

理性自私的代價

前面的重複囚徒困境、旅行者困境、農夫困境的納許均衡解都是由迭代歸納（基本上就是數學歸納法）而得，這種個人單方面理性選擇最終卻損害所有人利益的策略，被稱為**迭代去除佔優策略**。

啟示：所有人都自私，則所有人都受害

問題：如果部份人合作，部份人背叛，結果合作者受到懲罰（獲利減少），背叛者得到獎勵（獲利增加），這會嚴重打擊合作的積極性，該如何解決？

答案：建立懲罰機制，或是限制這類策略

法律上的應用：契約訂定

定義： **契約**是當事人基於意思表示合致而成立的法律行為

前述的農夫困境如有具法律效力的契約約束，明定「過河拆橋」的賠償，便有可能建立穩定的合作關係。

實例：公海捕撈是類似囚徒困境的多人賽局，為避免過度捕撈，聯合國於1956年通過「捕魚及養護公海資源公約」

法律上的應用：認罪協商

定義：認罪協商是刑事程序中，被告用認罪來換取檢察官減輕量刑或罪名的一種協議

前述的囚徒困境就屬於認罪協商。

認罪協商的主要優點是利於檢察官辦案，主要缺點之一是檢察官權利過大，二是容易造成罪輕者重判、罪重者輕判，所以在多數國家（特別是大陸法系）被禁止（如日本、丹麥）或嚴格限制（如臺灣、法國、義大利），但在美國（海洋法系）被普遍使用(94% Federal Crime in 2001, by G. Fisher 2003)。

最後通牒賽局

假設在教室中，坐在你旁邊的是個陌生的同學，以後不會再見面，不必考慮未來相處是否尷尬的問題。

假設現在我給你10000元，你必須和旁邊同學分配，從1元到10000元皆可，你只能提一個分配方案，不能和對方商量。如果對方選擇接受，那麼錢就是你們的，並照你所提案方式分配；但如果對方不接受，你就必須把錢全部還我，不能再提第二個方案。

你要提怎麼樣的分配方案？
測試一下旁邊同學是否接受！

最後通牒賽局

按照「完全理性」假設，對你旁邊的同學而言，只有接受或拒絕兩種選擇，而有錢總比沒錢好，你只要分配1元給對方，對方應該就會接受。

實驗結果：

大多數人提案分配比例約為60:40

多數的受分配者會拒絕低於25%的分享

分配比例因文化而異，有些民族平均分配給對方超過50%

（有趣的是，富裕的民族普遍比較小氣）

信任賽局

與前面最後通牒賽局類似，假設坐在你旁邊的是個陌生的同學，以後不會再見面，不必考慮未來相處是否尷尬的問題。

假設現在我給你們每人100元，你必須決定究竟要把錢送給旁邊同學，還是直接據為己有。如果你留下這100元，你們可以各自帶著這100元離開。如果你把錢給對方，對方將可獲得額外的400元，這時對方可以選擇全部據為己有，或是分一半給你。你不能和對方商量。

你是否要把錢送給對方？

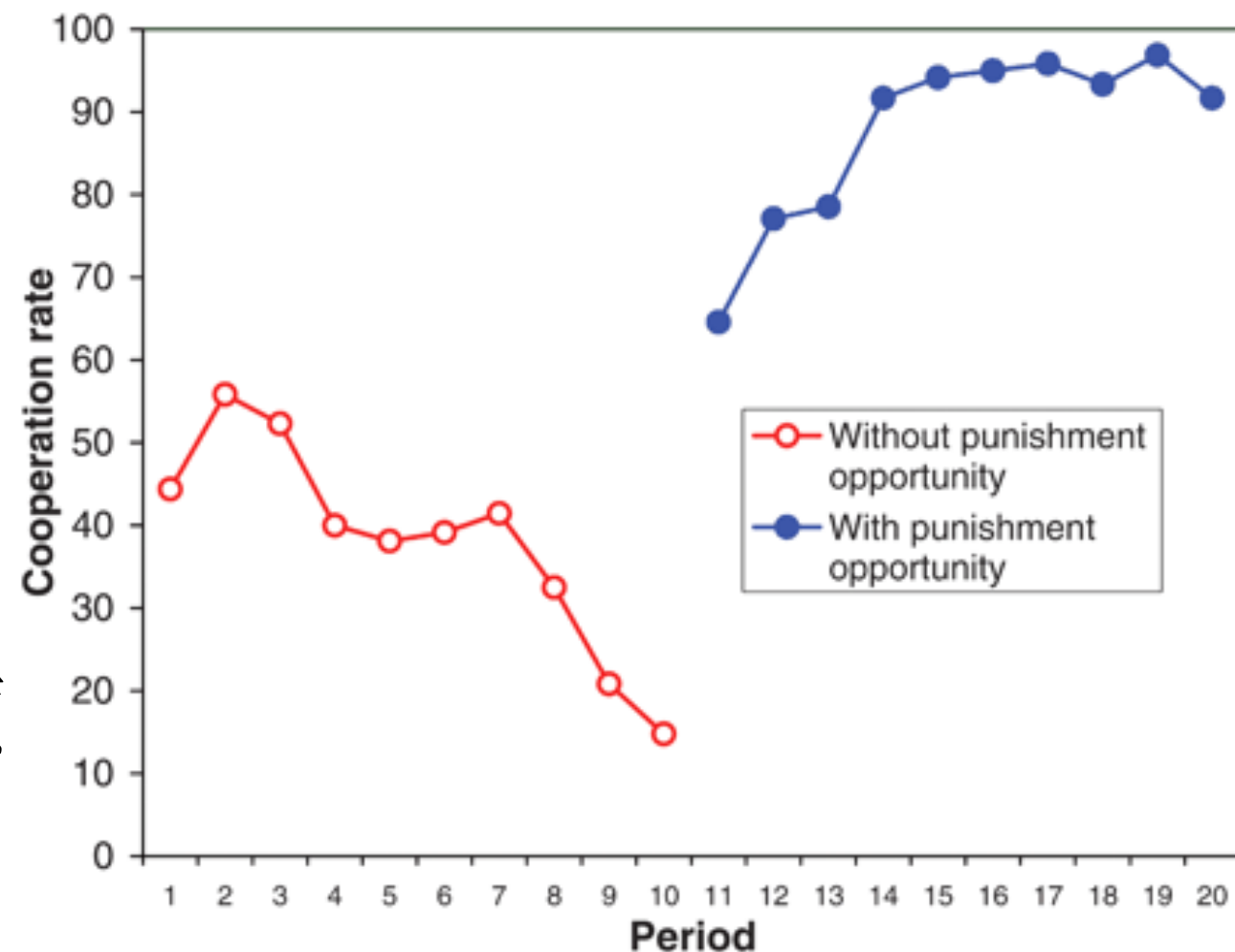
若對方把錢送給你，你是否還贈一半的錢？

信任賽局

E.Fehr與C.Camerer (*Science*, 2006) 設計了一個關於這個信任賽局的實驗，加入一個「懲罰」的機制：若你的同伴獨吞所有錢，你可以選擇用自己的錢懲罰他，你付出1元，對方就要失去2元。

他們的實驗結果顯示，多數人都會選擇懲罰對方，而且下手很重。

啟示：合作互惠的關係需兼顧理性與人性，需有懲罰機制



Recommended Readings (👉 Required)

- 👉 1. M. Buchanan: *The Social Atom - Why the Rich Get Richer, Cheaters Get Caught, and Your Neighbor Usually Looks Like You*, Bloomsbury USA, 2007. 中譯本: 《隱藏的邏輯》, 天下遠見, 2007. 第二、三章
- 2. Jordan Ellenberg: “How Not to Be Wrong: The Power of Mathematical Thinking”, Penguin Group USA, 2014. (中譯本: 《數學教你不犯錯》, 天下文化, 2016.) 第六、十章