# problem 8 in h.w. 6：

Let

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\sin zt}{t}\, dt.$$

Show that

(a) $f$ is entire.

(b) $f'(z) = \int_0^1 \cos zt\, dt$.

---

關於這題的 (b) ，可能會牽涉到將微分放入積分的步驟，現在我們考慮的是複變數的函數，會和實數變數時有點不同，我將在下方說明。 此外，我在上課時也沒有將這部分寫得很好，因此用其它方法重新寫在下方。

## 1°

首先，讓我們回顧在對於雙變數函數的簡單情況：

Let $g(x,y)$ be a $C^1$-function of $(x,y)$ defined on $[a,b]\times[c,d]$. Let

$$f(y) = \int_a^b g(x,y)\, dx.$$

Then $f'(y) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\, dx$.

由微分的定義，我們要討論以下極限

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(y+t)-f(y)}{t} = \lim_{t\to 0} \int_a^b \frac{g(x,y+t)-g(x,y)}{t}\, dx.$$

因此，本質上，這也是個極限能不能放入積分的問題，那就會牽涉到均勻收斂的概念。

由於均勻收斂只定義在 sequences of functions 上 (也不知道為什麼都沒有教科書要將它推廣) ，我們要取一個 sequence $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ 收斂到 0 ，想證明

$$\frac{g(x,y+t_n)-g(x,y)}{t_n} \to \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

uniformly on $[a,b]$.

在這個情況，我們能用微分均值定理，將 $\frac{g(x,y+t_n)}{t_n}$ 寫為 $\frac{\partial g}{\partial y}(x,\eta_n)$ ，其中 $\eta_n$ 是介於 $y$ 和 $y+t_n$ 之間的某個數。 接著由於 $\frac{\partial g}{\partial y}$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 均勻連續，因此對於 $\epsilon > 0$ ，可以找到一個 $\delta > 0$ 使得當 $|y_1-y_2| < \delta$ 時，就有 $|g(x,y_1)-g(x,y_2)| < \epsilon$ 。 因此便得到

$$\left| \frac{\partial g}{\partial y}(x,\eta_n) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \right| < \epsilon$$

if $|\eta_n - y| < \delta$. 進一步推得我們要的 $\dfrac{g(x, y+t_n)}{t_n} \to \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ uniformly on $[a,b]$.

最後，對於每個收斂到 0 的 sequence $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，我們都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y+t_n)-f(y)}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{g(x,y+t_n)-g(x,y)}{t_n}\,dx = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dx,$$

所以我們有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y+t_n)-f(y)}{t_n} = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dx,$$

也就是 $f'(y) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dx.$

## $2^\circ$

假如我們的函數是 $g(z,t)$ ，$g$ 整體是個 $C^1$ 函數，對固定的 $t$ ，$z \mapsto g(z,t)$ 都是一個解析函數，定義在某個 $z_0$ 附近，$t$ 的範圍假設是 $[a,b]$ ，那麼我們可以取一個 $r>0$ 使得 $g$ 的偏導數在 $\overline{D}(z_0,r)\times[a,b]$ 是連續的。

然而這裡沒辦法以 $1^\circ$ 的方式將 $\dfrac{g(z,t)-g(z_0,t)}{z-z_0}$ 換成 $\dfrac{\partial g}{\partial z}(w,t)$ ，因為 $g$ 對 $z$ 微分是考慮複變數的微分，並沒有 Mean Value Theorem 可以用，因此我們可能需要去討論函數

$$h(z,t) := \begin{cases} \dfrac{g(z,t)-g(z_0,t)}{z-z_0} & \text{if} \quad z \neq z_0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(z_0,t) & \text{if} \quad z = z_0 \end{cases}$$

是否能在 $\overline{D}(z_0,r)\times[a,b]$ 連續。

## $3^\circ$

對於 $1^\circ$ 或 $2^\circ$ ，另外一種方式是將 $f(z,t)$ 寫為偏導數的積分，即

$$g(z,t) = g(z_0,t) + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial g}{\partial z}(w,t)\,dw$$

這邊用到“$g$ 是 $C^1$ 函數”。 如此一來，我們要對 $z$ 微分的東西就變為

$$\int_a^b g(z_0,t) + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial g}{\partial z}(w,t)\,dw\,dt$$

這裡可以把它拆成兩項，有一項與 $z$ 無關，我們不必管它；而與 $z$ 有關的那一項是個雙重積分的樣子，由於要積分的函數是連續函數，且對兩個變數的積分範圍都算是閉區間 ($z_0$ 積到 $z$ 的直線路徑與閉區間本質上相同) ，我們可以用 Fubini 定理換個順序，便得到

$$\int_{z_0}^{z} \int_a^b \frac{\partial g}{\partial z}(w,t)\,dt\,dw$$

如果能夠證明固定 $t\in[a,b]$ 時，$w \mapsto \displaystyle\int_a^b \frac{\partial g}{\partial z}(w,t)\,dt$ 是個定義在 $z_0$ 附近的解析函數，那麼由書上 Theorem 4.15 ，它從 $z_0$ 積分到 $z$ 再對 $z$ 微分便是自己了。

## $3^\circ - 1$

假如 $\frac{\partial g}{\partial z}(z,t)$ 是 $(z,t)$ 的連續函數，且固定 $t$ 時是 $z$ 的解析函數，我們可以用 Morera 定理來證明固定 $t$ 時，$z \mapsto \int_a^b \frac{\partial g}{\partial z}(z,t)\,dt$ 是解析函數，in general ，可以寫成以下的敘述： If a function $F(z,t)$ defined on $D \times [a,b]$, where $D \subset \mathbb{C}$ is a region, is analytic in $z$ and continuous in $(z,t)$, then $\int_a^b F(z,t)\,dt$ is analytic on $D$.

要使用 Morera 定理，對 $t$ 積分後的連續性，用均勻連續的概念便可簡單估計出來，這部分在高等微積分學過。 因此以下只說明 $\int_a^b \frac{\partial g}{\partial z}(z,t)\,dt$ 這個函數在 $D$ 中任意長方形路徑的積分都是 0

我們令 $\Gamma \subset D$ 為一個長方形路徑，接著考慮積分 $\int_\Gamma \int_a^b F(z,t)\,dt\,dz$ ，由於 $F$ 在 $D \times [a,b]$ ，所以由 Fubini 定理，可以將積分互換，即

$$\int_\Gamma \int_a^b F(z,t)\,dt\,dz = \int_a^b \int_\Gamma F(z,t)\,dz\,dt.$$

因為在固定 $t$ 時，$F(z,t)$ 是解析函數，所以 $\int_\Gamma F(z,t)\,dz = 0$ ，而得到整個積分是 0 ，再由 Morera 定理得到 $z \mapsto \int_a^b F(z,t)\,dz$ 是解析函數。

## $4^\circ$

在複變中，我們學了 generized Cauchy integral formula: if $f$ is analytic at $z_0$, then

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,$$

for every circle $C$ in the domain of $f$ around $z_0$.

如此一來，對於 $2^\circ$ 中的 $f(z)$，假如已經知道它是 analytic ，我們便能將它寫為

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw.$$

將 $C$ 用參數 $z + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ 表示，它就變為

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\,d\theta.$$

將 $f(z) = \int_a^b g(z,t)\,dt$ 代入其中，便得到

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_a^b \frac{g(z+re^{i\theta},t)}{re^{i\theta}}\,dt \right) d\theta.$$

由於 $\frac{g(z+re^{i\theta},t)}{re^{i\theta}}$ 是 $(\theta,t)$ 的連續函數，因此可以用 Fubini 定理換積分順序，而得到

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left( \int_0^{2\pi} \frac{g(z+re^{i\theta},t)}{re^{i\theta}}\,d\theta \right) dt.$$

接著把括弧中還原成在 $C$ 上積分，即

$$f'(z) = \int_a^b \frac{1}{2\pi i} \left( \int_C \frac{g(w,t)}{(w-z)^2}\,dw \right) dt.$$

由於 $w \mapsto g(w,t)$ 是 analytic，再用一次 Cauchy integral formula，就有

$$f'(z) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial z}(z,t)\,dt.$$

藉由 Cauchy integral formula，以上整個過程就只是個簡單的代換，不需要什麼估計，也清清楚楚沒什麼瑕疵，建議同學們學起來。 當然，如果想在證明 generized Cauchy integral formula 時，將微分放進積分內，就不能用這個方法了。

## 5°

回到我們的習題，在演習課中我是用 2° 的方式說明微分可放進積分，但這將必須說明以下函數 $h$ 是 $(z,t)$ 的連續函數

$$h(z,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\dfrac{\sin(zt)-\sin(z_0t)}{z-z_0} & ,\text{if} \quad z \neq z_0,\ t \neq 0 \\ 1 & ,\text{if} \quad t = 0 \\ \cos(z_0t) & ,\text{if} \quad z = z_0. \end{cases}$$

其實不太好說明，因此我用 3° 的方式寫寫看:

Let $g(z,t) = \dfrac{\sin zt}{t}$ for $t \in (0,1]$ and $g(z,0) = z$.

Then for each $t \in [0,1]$, $g(z,t)$ is an analytic function of $z$ on $\mathbb{C}$.

Let $z_0 \in \mathbb{C}$. Since

$$g(z,t) = g(0,t) + \int_0^z \cos(wt)\,dw = \int_0^1 \cos(zst)\,z\,ds,$$

we have

$$f(z) = \int_0^1 \int_0^1 \cos(zst)z\,ds\,dt.$$

By Fubini's Theorem, (其實上面 $s,t$ 根本位置對稱，換積分順序只是符號改一下，不過一般來說可能會用到 Fubini 定理交換積分的順序)

$$f(z) = \int_0^1 \int_0^1 \cos(zst)z\,dt\,ds = \int_0^z \int_0^1 \cos(wt)\,dt\,dw.$$

接下來的處理方式可能有不少種，可以依照 3° − 1 處理，以下再介紹兩個：

## 5° − 1

Since the function $\cos z$ is an entire function, we can expand it as a power series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ with radius of convergence $\infty$.

For fixed $w$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(tw)^n$ converges to $\cos(tw)$ uniformly on $[0,1]$, therefore

$$\int_0^1 \cos(tw)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} w^n.$$

Since $|c_n/(n+1)| \le |c_n|$ for all $n \in \mathbb{N}$, the radius of convergence is also $\infty$.

Therefore $w \mapsto \int_0^1 \cos(tw)\,dt$ is an entire function. By theorem 4.15, we obtain that

$$f'(z) = \int_0^1 \cos(tz)\,dt.$$

□

## 5° − 2

注意到 $\displaystyle\int_0^1 \cos(wt)\,dt$ 這個積分其實可以直接算出來，積分後為以下函數

$$\begin{cases} \dfrac{\sin w}{w} & \text{if} \quad w \neq 0 \\ 1 & \text{if} \quad w = 0 \end{cases}$$

因為 $\dfrac{\sin w}{w} = \dfrac{\sin w - \sin 0}{w - 0}$ 以及 $1 = \dfrac{d}{dw} \sin w \Big|_{w=0}$ ，根據 proposition 5.8 ，它是 entire function 。 接著同 5° − 1 ，由定理 4.15 得到

$$f'(z) = \int_0^1 \cos(tz)\,dt.$$

□

此外，同學們也可以練習用 4° 的方式寫寫看，這題其實也可以將 $\int_0^1 \cos(tz)\,dt$ 跟 $f'(z)$ 的 power series 都求出來，以此說它們相等，自行試試看吧。