數理思維

第八講：風險、效用與期望

什麼是風險？

定義：一個決策的實際結果比預期結果差的可能性，稱之為該決策的風險。

「風險」概念牽涉到：

1. 不確定性：實際結果有可能與預期不同
2. 可比性：結果有優劣之分

「風險」可以用在任何可量化或增減的概念上，例如時間、情感、名譽、地位、事業、治安、金錢等等。

風險評估是許多學門的重要議題，如經濟學、政治學、醫學等等。如何合理量化風險?

風險評估

有些概念容易量化，例如許多類型投資（定存、外幣、黃金、債券、不動產等等）的收益具有良好規範的計量方式，可以根據過去累積的歷史紀錄來估計風險。

有些概念不易量化，但實際結果與預期結果的落差在一定程度上可比較，例如政策效果、情感、健康等等。

eg. 健康：
吸菸的風險有鼻塞、支氣管炎、肺癌等等
嚼檳榔的風險有牙周病、口腔黏膜下纖維化、口腔癌等等
有些危害有輕重之分，有些危害難分上下。

風險評估

eg. 產業政策：

1. 推動產業轉型有可能提高產業競爭力、整體稅收，風險有失業率提高，影響社會治安，治安的一個量化指標是犯罪率。
2. 離島博弈預期可提高觀光收入，風險包括物價飆升與治安敗壞等，物價的一個量化指標為消費者物價指數(CPI)。
3. 大學法人化有可能提高學術自由並減少政府支出，風險是學費大漲與學術商業化。
4. 在嚴重傳染病流行期間失業率上升，流行病消失前復工可以降低失業率，風險是增加死亡人數。

對特定決策的得失採用一個計量方法，則可將風險量化，量化過程牽涉到兩個數學概念：期望值、效用函數。

期望值

假設一個決策（試驗）的各種可能結果有一定的概率，也有一定的量化收益。令 S 為所有不能細分的可能結果（稱之為樣本空間），可能結果 $x \in S$ 的出現概率是 $p(x)$，收益是 $E(x)$，則該決策的期望值是所有 $E(x)p(x)$ 的加總。

比較直觀的說法：期望值是不斷反覆同一個試驗，長時間累計所得的平均收益。

以擲骰子為例，點數表示收益， $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，由於擲出1～6點的機率都是1/6，故期望值是

$$1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6 = 3.5$$

期望值

以擲3個銅板為例，若出現k個正面，得分為2^k，則期望值為

$1 \cdot 1/8 + 2 \cdot 3/8 + 4 \cdot 3/8 + 8 \cdot 1/8 = 27/8 = 3.375$

賭場的大轉盤有38個數字，玩家壓對數字贏35倍，則下注100元的期望值為

$3500 \cdot 1/38 + (-100) \cdot 37/38 = -100/19 \approx -5.26316$

所以，平均而言，玩家每下注100元大約輸給莊家5.26316元。

計算精確期望值的難度取決於能否得出各種結果出現的概率，在複雜的問題上，這個概率常常無法準確得知，需用統計方法來估計。

課堂活動：熟悉期望值

回顧Monty Hall Problem：

假設你參加一個猜獎遊戲，三扇門中有一扇門後面有獎品。你選中了一扇門(假設是1號門)，尚未打開它。這時，主持人為了增加懸念，先打開了剩餘兩扇中沒有獎品的一扇(主持人事先知道獎品在哪，假設他打開了3號)。現在，你獲得了一次改變最初選擇的機會，你可以繼續選擇1號，也可以改選2號。請問，你該不該換？

假設獎品價值1萬元，計算「換」與「不換」兩種決策的期望值。若其餘條件不變，但「三扇門」改成「四扇門」呢？

期望值與理性選擇

在一些具有不確定性的決策中，理性選擇是期望值最大的選擇。

例如玩Blackjack(21點)，若得到的牌大於17點，莊家翻出的牌小於9點，選擇不加牌的期望值為正；若得到的牌是17點，只有一種情況期望值為正，就是莊家翻出的牌是6，且選擇不加牌。

例如有一百萬的現金，需選擇一種投資方式，且能預估年收益：

1. 定存：1%
2. 基金：20%概率 -5%, 30%概率 0%, 50%概率 5%

兩個選項中，期望值以第2項較大，所以理性選擇是第2項。實際上1. 2. 的風險顯著不同，選擇何者要考慮風險承擔的能力。

期望值與信仰：帕斯卡的賭注

國哲學家帕斯卡 (Baise Pascal, 1623~1662) 在《思想錄》中提出了期望值的概念，還用以「證明」相信上帝是理性選擇。他的論述被稱為帕斯卡的賭注（Pascal's Wager）：（不代表本人立場）

假設每人都需針對上帝是否存在下注，上帝存在的概率是 $p \in (0,1)$。

決策一：相信上帝，需要損失一些自由、金錢等
若上帝存在，則得到永恆的生命與快樂，收益是 ∞；若上帝不存在，則損失一些自由、金錢等，故期望值是：$\infty \cdot p +$ 有限損失 $\cdot (1-p) = \infty$

決策二：不信上帝，多了一些自由與金錢
若上帝存在，不信上帝不能上天堂，沒有多餘收益，與上帝不存在的收益相同，故期望值是：有限獲得 $\cdot p +$ 有限獲得 $\cdot (1-p) < \infty$

結論：對任意的上帝存在概率 $p \in (0,1)$，信上帝是理性選擇。

期望值與愛情：含蓄表白

S. Pinker用共同知識與共有知識解釋含蓄語言的社會功能，以表白為例：

假設一對普通朋友的男方希望成為男女朋友，他可以選擇直接或含蓄地告白，假設收益矩陣如右

	接受（成功）	拒絕（失敗）
直接	從普通朋友變男女朋友(+A)	可能連普通朋友都當不成(-B)
含蓄	從普通朋友變男女朋友(+A)	維持普通朋友關係(0)
不表白	維持普通朋友關係(0)	維持普通朋友關係(0)

若表白成功概率為p，則直接表白的期望值為 A p - B(1-p)
含蓄表白的期望值為 A p
不表白的期望值為 0

無論A, B, p的值為何，含蓄表白的期望值都最大。

風險迴避

回到剛才提的例子：

例如有一百萬的現金，需選擇一種投資方式，且能預估年收益：

1. 定存：1%
2. 基金：20%概率 -5%, 30%概率 0%, 50%概率 5%

兩個選項中，期望值以第2項較大，所以理性選擇是第2項。

可是若有以下第3個選項呢？

3. 股票：20%概率 -100%, 20%概率 0%, 60%概率 50%

這個選項雖然期望值更大，但存在血本無歸的可能性，許多人無法承擔這樣的風險，必須迴避這個選項。我們可以把風險量化為經概率加權的損失（1.為 0，2.為-0.01，3為-0.2）。

聖彼得堡悖論 (St. Petersburg Paradox)

Bernoulli(伯努利)家族是歷史上著名的科學與數學世家，其中 Nikolaus I. Bernoulli在1713年提出了以下問題：

遊戲規則：連續投擲硬幣，直到擲出正面為止。若第一次就擲出正面，就賺1元，若是在第二次擲出正面，就賺2元，若是第三次擲出正面，就賺4元，依此類推 — 若是第k次擲出正面，便賺2^{k-1}元。

問題：你願意付多少錢參加這個遊戲？

此問題之所以被稱為悖論，是因為似乎不存在「理性選擇」。

聖彼得堡悖論 (St. Petersburg Paradox)

如果我們接受「遊戲的期望值」是合理的價格，那麼這個「合理」的價格∞！因為這個遊戲的期望值是

$$1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/8 + 8 \cdot 1/16 + \ldots = 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots = \infty$$

當然，沒有人能夠，也沒有人願意拿出無窮多的錢來玩這個遊戲。Daniel Bernoulli發現他周遭的人平均只願意出2元來玩這個遊戲，他在1738年的一篇論文中提出極具說服力的解答，他的看法是人們的理性選擇不是期望值最大的選項，而是期望效用最大化的選項。

Daniel Bernoulli認為不同的金額有不同的「效用」，一個已經有1000元的人，再給他1000元，效用比第一個1000元要小，再加1000元的效用又會更小，依此類推。這就是「邊際效用遞減原理」。

聖彼得堡悖論 (St. Petersburg Paradox)

Daniel Bernoulli認為一個已經有1000元的人，再給他1000元，其效用與給一個已經有10000元的人10000元相當。如果用函數表示不同金額的效用，這個函數，稱為效用函數，與對數函數 log 類似（邊際效用遞減表示效用函數為下凹的函數，具有上述性質的函數一定是 log 的常數倍）。前面遊戲的期望效用是

$$1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/8 + 4 \cdot 1/16 + \ldots = 1/2 + 2/4 + 3/8 + 4/16 + \ldots = 2$$

最後的等式可以由下面的列表看出：

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots = 1$$
$$1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots = 1/2$$
$$1/8 + 1/16 + \ldots = 1/4$$
$$\ldots\ldots.$$

右邊累加的值為2，完美說明了為何他周遭的人平均願意出2元玩這個遊戲！

期望效用函數理論

Bernoulli的理論，在20世紀中被馮‧紐曼和摩根斯坦(Von Neumann and Morgenstern)公理化，運用邏輯和數學工具建立了有不確定性的情形下理性行為人的決策理論，被稱為期望效用函數理論。這套理論對許多不符合最大期望值的行為提供了十分有說服力的解釋。

利用期望效用函數理論，我們可以把風險量化為期望效用的可能損失，而非期望值的可能損失。

艾爾斯伯格悖論 (Ellsberg Paradox)

期望效用函數理論 (Expected utility theory, EUT)經過許多修正，經濟學家艾爾斯伯格 (Daniel Ellsberg, 1931~2023)在1961年提出一個著名的挑戰。

艾爾斯伯格提出的理論與分析成為他1962年哈佛大學的博士論文，當時他被認為是決策理論的新星，1964年起被延攬至五角大廈為美國軍方工作，1971年因為洩漏軍方情報(Pentagon Papers)給時代雜誌、華盛頓郵報等媒體而被起訴115年徒刑，1973年被判無罪。

Source: Wikipedia

艾爾斯伯格悖論 (Ellsberg Paradox)

遊戲規則：一個不透明箱子裡有90個小球，其中有30個紅球，其餘的球有黑有黃，數目不確定。你可以在下面的選項中擇一，然後抽一個球。

A. 以下兩個選項，你要選哪一個？
1. 紅球：選出的是紅球，則獲得100元
2. 黑球：選出的是黑球，則獲得100元

B. 以下兩個選項，你要選哪一個？
1. 非紅球：選出的不是紅球，則獲得100元
2. 非黑球：選出的不是黑球，則獲得100元

艾爾斯伯格悖論 (Ellsberg Paradox)

令u(x)為決策x的期望效用。艾爾斯伯格的實驗顯示：
在A中，多數人選「紅球」，表示 u(黑球)<u(紅球)
在B中，多數人選「非紅球」，表示 u(非黑球)<u(非紅球)

若考慮「紅球與非紅球」，期望效用是 u(紅球)+u(非紅球)
若考慮「黑球與非黑球」，期望效用是 u(黑球)+u(非黑球)

所以 u(黑球與非黑球) ＝ u(黑球)+u(非黑球)
< u(紅球)+u(非紅球) ＝ u(紅球與非紅球)

這是個矛盾，因為「紅球與非紅球」＝「黑球與非黑球」！

風險心理

艾爾斯伯格悖論說明了期望效用函數理論 (EUT) 有明顯的侷限，當人們面對知道期望值與不知道期望值的兩個選項時，人們傾向於選擇知道期望值的選項（比較確定的不確定選項）。這顯示了人類具有迴避不確定性的心理傾向。

下面我們再看一個實驗，反映人類另一個關於風險的心理傾向。

風險心理

假設有一種病毒入侵台灣，估計會造成600人死亡，衛生署委託流行病學專家研擬對策，有A、B兩個方案被提出…

（版本一）

若採用A方案，將可救回200人的性命

若採用B方案，有1/3的機率可以救回所有600人的性命，但有2/3的機率是這600人都無法挽救

現在，作為一個好國民，你希望選擇哪一個方案？

實驗結果: 約80%的人選方案A

風險心理

假設有一種病毒入侵台灣，估計會造成600人死亡，衛生署委託流行病學專家研擬對策，有A、B兩個方案被提出…

（版本二）

若採用A方案，將會造成400人死亡

若採用B方案，有1/3的機率沒有任何人死亡，有2/3的機率是這600人都會死亡

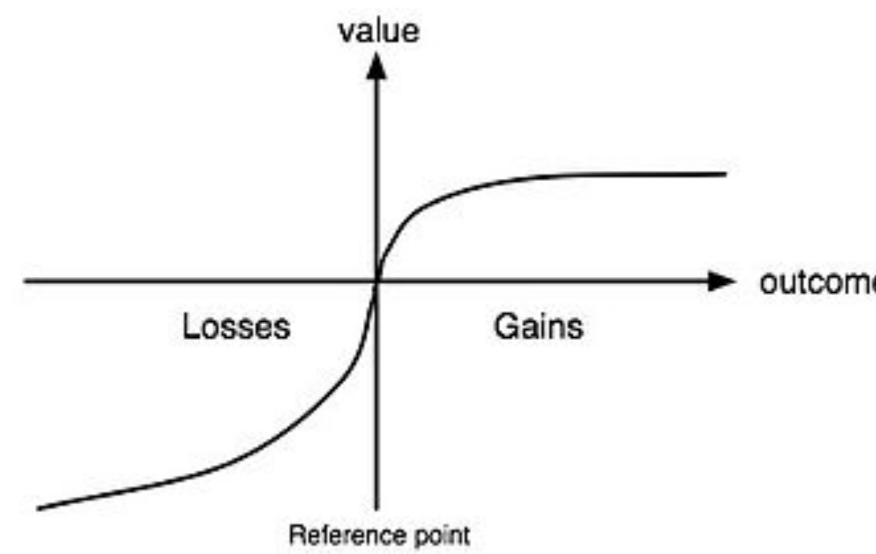
現在，作為一個好國民，你希望選擇哪一個方案？

實驗結果: 約56%的人選方案A

風險心理

上面實驗顯示，邏輯上等價（期望值一樣）的敘述，可以因為採用正面 (收益) 或負面 (損失) 敘述而導致不同結果；人們面對收益時，傾向於迴避風險，面對損失時，傾向於冒險。此現象在心理學上稱為「框架效應」(framing effect)。

根據邊際效用遞減原理，效用函數是一個向下凹的函數；框架效應則告訴面對損失時，效用函數應該是向上凹的函數。此一修正EUT之行為經濟理論稱為前景理論 (prospect theory, Daniel Kahneman and Amos Tversky 1979)。可把風險量化為修正之期望效用的可能損失。



Utility curve — from Wikipedia "Prospect theory"

Recommended Readings (☞ Required)

1. Jordan Ellenberg: “How Not to Be Wrong: The Power of Mathematical Thinking”, Penguin Group USA, 2014. (中譯本名稱: 《數學教你不犯錯》，天下文化，2016.) 第11~13章
2. ☞ “A 300 year old probability paradox | St. Petersburg Paradox” by OptWhiz: https://www.youtube.com/watch?v=inlha5mKETA&t=609s