

數理思維

第五講：知識與邏輯

知識哲學

基礎論 (Foundationalism):
有些基本命題不需證明

eg. 歐式幾何、非歐幾何

融貫論 (Coherentism):
命題是非決定於是否與被接納的其他命題衝突

粒子物理

懷疑論 (Skepticism):
任何命題均可被質疑

後現代主義

知識與常識

知識、常識、或兩者皆非？

1. 地球繞著太陽轉
2. 近乎相同幾何位置的日蝕約每6585.321天會重現（沙羅週期）
3. 水星是離太陽最近的行星
4. 月球盈虧的週期大約是29.5天
5. 地球是太陽系唯一有生命的行星

知識與常識

從前面的觀察和討論，歸納「知識」的基本特質：

1. 被發現、驗證、或確信為正確
2. 對一些人來說有意義或價值
3. 有些知識具有普遍性，有些知識具有時空或族群的侷限性
4. 常識是比較基本、大多數人知道的知識

在古希臘時期，知識被認為是通往真理的途徑；文藝復興之後，人們逐漸將知識視為一種相對的工具。

知識與常識

定義：

資訊(information)是經過分析的已知事實，以及被賦予意義的訊息

知識(knowledge)是資訊、前後脈絡及經驗的組合 (D.B. Harris 1996) ；知識是資訊經過整理轉化，成為人類理解與學習的結果 (I. Nonaka 1994)

常識(general knowledge)是一般社會上智力與教育程度正常的人應有的知識

共有知識與共同知識

邏輯學上對於「知識」的討論，有兩個與「常識」接近的概念，稱為「共有知識」與「共同知識」

定義：（邏輯學）給定一群體

共有知識(mutual knowledge)是所有參與人知道的知識 (S.Schiffer 1988)

共同知識(common knowledge)所有人知道，所有人知道其他人知道，所有人知道其他人知道其他人知道.....的知識 (D.K.Lewis 1969)

「共有知識」與「共同知識」表面上差別不是太大，但實際上差別非常大。這兩個概念被應用在法律、政治、語言學等領域。

共有知識與共同知識

前面提過的「地球繞著太陽轉」是我們都知道的常識，而且我知道你們都知道，你們也知道我知道你們知道.....，所以是「共同知識」。

有些知識可能我們都知道，例如「水星是離太陽最近的行星」，但我們不能肯定其他人都知道，或是不能肯定其他人都知道其他人知道.....。這類「常識」的普及率稍微低一些，是「共有知識」而非「共同知識」。

像沙羅週期，是「知識」而非「共有知識」。

例一：國王的新衣（安徒生童話）

在「國王的新衣」這個故事的最後，所有人都看到國王沒有穿衣服，所以「國王沒有穿衣服」是共有知識，但人們不能肯定別人是否知道，或者不能肯定別人是否知道自己知道...。



From : <http://davidtremontozzi.com/2016/06/emperors-new-clothes/>

在小孩喊出「國王沒有穿衣服」之後，所有人都大笑，表示這個共有知識已經成為共同知識。

例二：農夫困境 (D. Hume, 1740)

回顧我們上次討論過的農夫困境：

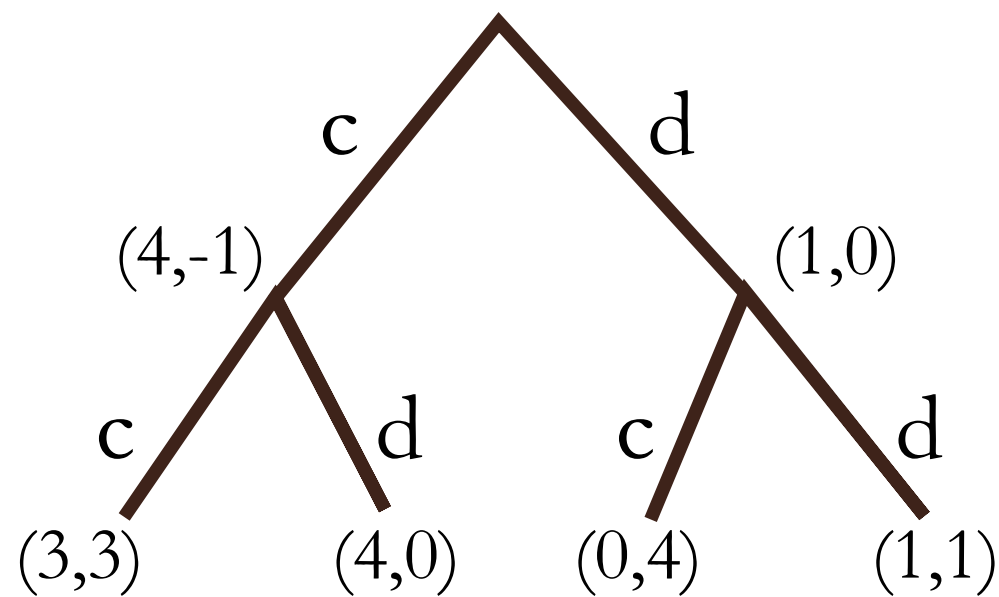
有甲乙兩個相鄰的農家，他們理性、自私、沒有感情。他們的作物收成時間錯開三個月，如果沒有鄰居農家幫忙收莊稼，就會來不及採收，一半莊稼爛在田裏；反之，如果合作，就可以全數採收。

假設全數採收的那方獲利是 4，半數採收的獲利是 1，幫助對方的勞力成本是 1（獲利是 -1），為自己採收不計勞力成本。

我們再次考慮雙方共採收任意次。

例二：農夫困境 (D. Hume, 1740)

和上次一樣，我們將「合作」標示為「c」，「拒絕」標示為「d」，考慮雙方採收多次，某一次要由乙農家決策，然後甲，然後乙...，從這一次開始形成一個由 c 和 d 構成的序列，現在用樹狀圖， (x,y) 表示(甲,乙)從這次算起的收益：



知識系統：

- (1) 甲乙兩人都理性 (排除低收益選項)
- (2) 甲乙兩人都知道收益樹狀圖

若(1)(2)是共有知識，dd非必然結果
若(1)(2)是共同知識，dd是必然結果

例三：藍眼睛島謎團

從前有一個神秘的島嶼，住著一個神秘的部落，部落裏有200個人，這些人邏輯推理能力都極為迅速且完美，也知道其他人完美的邏輯推理能力。他們之中有100個人眼睛是藍色，100個人眼睛是棕色。部落裏有個古怪的規定：不許討論任何人眼睛的顏色，不許知道自己眼睛的顏色，任何島民只要知道自己眼睛的顏色，就必須在當天午夜離開小島。所有島民都嚴格遵守此規定。

有一天一個有藍色眼睛的外國人來到島上，得到部落的熱情招待與信任。臨走的那天傍晚，他對全島居民表達他的感激，並無意中說了一句話：「能夠在這裏看到與我眼睛顏色一樣的人真是神奇」。

請問這句話對島民產生什麼樣的影響？

例如：過1天、10天、100天、200天後的那天中午島上有幾人？

遊戲：牌色推理（規則於課堂宣布）

以三人為例，假設有 2 紅 1 黑

一開始「有人拿紅牌」是共有知識，不是共同知識

我宣布「有人拿紅牌」後，「有人拿紅牌」成為共同知識

此時「有二人拿紅牌」不是共有知識

第一輪答題完後，「有二人拿紅牌」成為共同知識，拿紅牌者知道自己牌色

此時「恰好二人拿紅牌」不是共有知識

第二輪答題完後，「恰好二人拿紅牌」成為共同知識，且每個人都知道自己的牌色

遊戲：牌色推理（規則於課堂宣布）

上面遊戲將二人推廣至三人，三人推廣至四人.....的推理過程，用了窮舉法與數學歸納法。我們可以觀察到：

假設所有人都不知道自己的牌的顏色，有 n 個人拿到紅牌， m 個人拿到黑牌。已知至少有一張紅牌的情形下，在第 $n-1$ 次推理答題後，所有拿紅牌的人都應該知道自己的牌色，在第 n 次推理答題後，所有拿黑牌的人都應該知道自己的牌色。

經過 $n-1$ 次推理答題，「有 n 個人拿到紅牌」成為共同知識。

經過 n 次推理答題，「恰有 n 個人拿到紅牌」成為共同知識。

回到「藍眼睛島謎團」，從上面的遊戲（牌色換成眼色）我們得到：1～99天後的那天中午島上仍然有200人，100天後的那天中午島上剩100人，101天後的那天中午已經是個無人島了！

小組討論：類似的牌色推理遊戲

有甲乙 2 人參與，各拿 2 張牌，2 人邏輯推理能力都完美。假設甲拿 2 紅，乙拿 1 紅 1 黑，他們只能看自己的牌，能聽到對方答覆。

第一階段：我宣布「至少有兩張紅牌」

第二階段：我詢問甲是否知道對方的牌，甲誠實答覆

第三階段：我詢問乙是否知道對方的牌，乙誠實答覆

第四階段：我宣布「至少有三張紅牌」

第五階段：我詢問甲是否知道對方的牌，甲誠實答覆

第六階段：我詢問乙是否知道對方的牌，乙誠實答覆

第七階段：我宣布「恰好有三張紅牌」

問題：「甲不是 2 黑」、「乙至少有 1 紅」、「甲拿 2 紅」各自在哪一階段結束後成為共有知識？在哪一階段結束後成為共同知識？

Recommended Readings (👉 Required)

- 👉 1. “Wireless philosophy — Common Knowledge #1, #2”
https://www.youtube.com/watch?v=BdpZZc6r_2o
<https://www.youtube.com/watch?v=3Mviz0caJ-Y>
2. Stanford Encyclopedia of Philosophy 條目 「Common knowledge」
3. “The blue-eyed islanders puzzle” in Terence Tao’s blog (<https://terrytao.wordpress.com/2008/02/05/the-blue-eyed-islanders-puzzle/>)
4. Littlewood 1953 “A Mathematician’s Miscellany”, Cambridge University Press