

數理思維

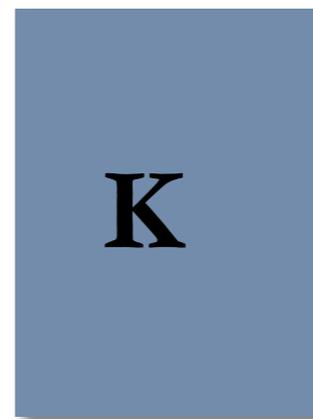
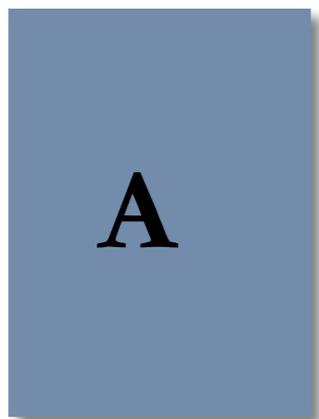
第二講：邏輯推理方法



拉斐爾 《雅典學院》 1510

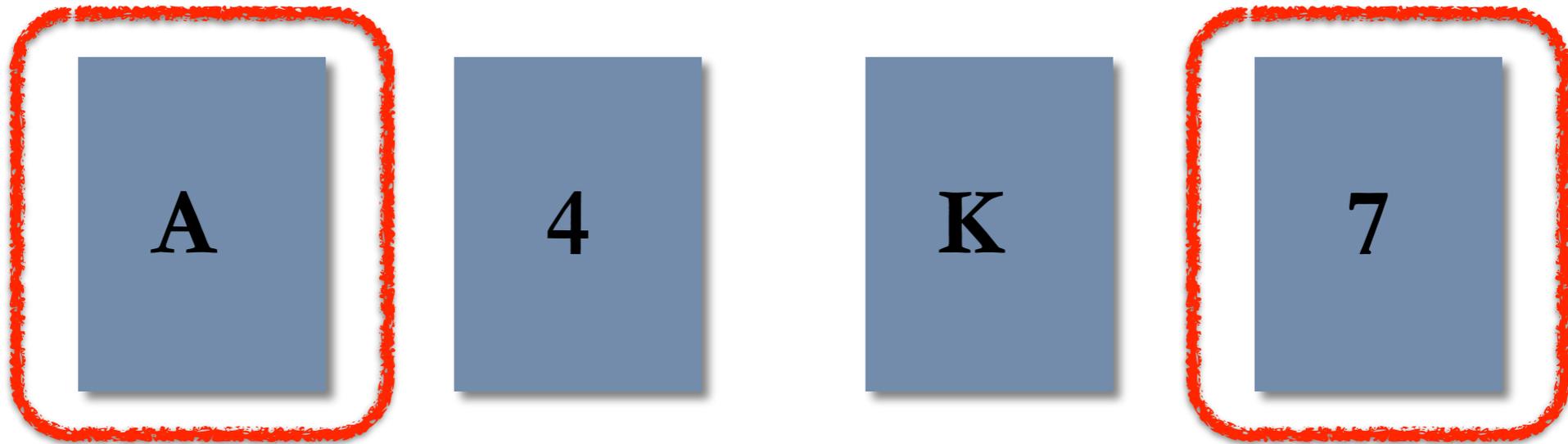
邏輯推理1：選卡

底下有四張卡片，每張上面有一面是英文字母，另一面是數字。我告訴你如果字母是A，那另一面數字一定是4。你可以翻開底下兩張牌來檢驗我說的話是否正確，你要選哪兩張？



邏輯推理1：選卡

底下有四張卡片，每張上面有一面是英文字母，另一面是數字。我告訴你如果字母是A，那另一面數字一定是4。你可以翻開底下兩張牌來檢驗我說的話是否正確，你要選哪兩張？



利用「 $A \Rightarrow 4$ 」與「 $\text{非}4 \Rightarrow \text{非}A$ 」等價（為何兩者等價？）

一個類題

底下有四張卡片，每張上面記錄了幼稚園孩童的活動資訊，有一面記錄孩童是否下午有吃餅乾，另一面記錄孩童是否幫忙收拾遊戲室。依規定孩童若有幫忙收拾，下午就有餅乾吃。你可以翻開底下兩張牌來檢驗是否有孩童違反規定，你要選哪兩張？

有吃
餅乾

沒吃
餅乾

有幫忙
收拾

沒幫忙
收拾

雖然這個類題與前面問題邏輯上相同，**實驗結果顯示迅速答對類題的人約65%，迅速答對前面問題的則只約有25%**。這說明許多人在有情境的問題中用直覺而非推理，回答抽象問題的正確率低。

邏輯推理2：《威尼斯商人》Portia's Game

金盒的銘牌：

「畫像在這個盒子裡」

銀盒的銘牌：

「畫像不在這個盒子裡」

鉛盒的銘牌：

「畫像不在金盒裡」

這三句話中只有一句話是真話。你要選哪個盒子？



邏輯推理2：《威尼斯商人》Portia's Game

金盒的銘牌：

「畫像在這個盒子裡」

銀盒的銘牌：

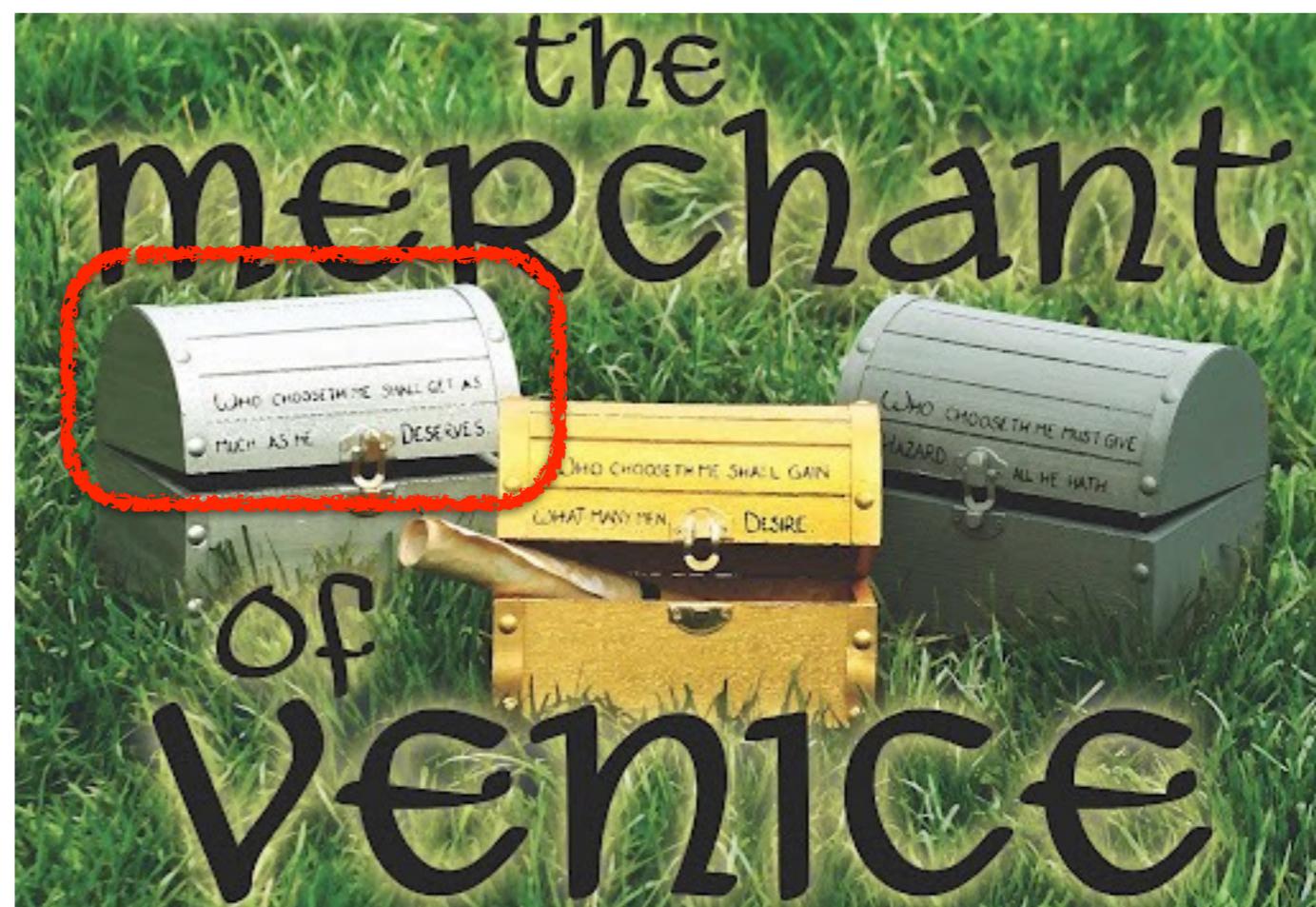
「畫像不在這個盒子裡」

鉛盒的銘牌：

「畫像不在金盒裡」

這三句話中只有一句話是真話。你要選哪個盒子？

若鉛盒銘牌改成「畫像在銀盒裡」，或「畫像不在銀盒裡」呢？



邏輯有錯嗎？

我是好人

好人有好報

⇒ 我有好報

I am nobody

Nobody is perfect

⇒ I am perfect

邏輯基本法則

	文字表述	形式邏輯
同一律	命題(或事物)與其自身等同	$P = P$
無矛盾律	命題不能同時為「真」與「假」	$\neg (P \wedge \neg P)$
排中律	命題必須為「真」或「假」	$P \vee \neg P$
充分理由律	任何命題成立必有其充足理由	$\forall Q \exists P (P \Rightarrow Q)$

推理方法

主要有**演繹法**與**歸納法**兩種。

演繹法：根據一般性的前提（已知事實或假設性前提）推導出特殊性的結論的方法。

歸納法：根據特殊性的前提（經由類比或擴大前提適用範圍）推導出具一般性的結論的方法。

演繹法與歸納法相輔相成，歸納法可能不嚴謹（存在嚴謹的數學歸納法、超限歸納法），推導過程需為邏輯正確的有效推理。

有效推理可以是正向推理，也可以是逆向推理，常見方法有反證法、歸謬法、窮舉法等等。

推理方法

反證法：假設命題為假，而推導出邏輯矛盾的結論 (無矛盾或排中律)

歸謬法：假設命題為假，而推導出荒謬的結論 (荒謬 \neq 邏輯矛盾)

窮舉法：藉由檢驗所有可能性來得出結論 (充分理由律)

例如命題為：「貓都會抓老鼠」 \Rightarrow 「白貓都會抓老鼠」

正向推理：白貓是貓，貓都會抓老鼠，故白貓都會抓老鼠 (三段式論證)

反證與歸謬：設存在不抓老鼠的白貓。白貓是貓，故存在不抓老鼠的貓，與前提矛盾。

窮舉法：檢驗是否所有白貓都會抓老鼠 (不管前提真偽)

歸納法：已知「白貓都會抓老鼠」，推論「貓都會抓老鼠」 (以偏概全)

邏輯推理謬誤

錯在邏輯的**形式謬誤**，通常是將不等價敘述視為等價，或是錯認因果關係。例如：

「成績好的人學習認真」

⇒ 「學習認真的人成績好」 「成績不好一定學習不認真」

「冬天比較多人用暖氣」 「冬天比較多人感冒」

⇒ 「用暖氣容易讓人感冒」

「大城市人口密集」 「大城市空汙較嚴重」

⇒ 「人口密集會造成空氣污染」 「空氣污染會造成人口密集」

「某某國家死刑判決多」 「某某國家謀殺犯罪多」

⇒ 「死刑判決多會提高謀殺犯罪率」

孟加拉前總理哈希娜評Quota Protest: 「如果自由戰士的子孫不獲得配額福利，難道拉札卡的子孫應該獲得配額福利？」

邏輯推理謬誤

推理不完備的**非形式謬誤**，通常是語意或概念不明確（定義不明、不同，或一詞多義，或蓄意替換），或是歸納上的不當類比（打稻草人、滑坡謬誤等）。例如：

希拉蕊:「我們應該更加開放國家邊界」(2016/10)

川普:「你的主張會讓非法移民問題更加嚴重」

評論羅伯李的雕像從維吉尼亞夏洛蒂鎮移除 (2017/8)

川普:「很難過看到我們偉大國家的歷史與文化被拆解；今天是羅伯李，下週可能是傑克遜，再下週是華盛頓，然後是傑佛遜？」

數學實例

給定一個二位數 n ，令其十位數為 i ，個位數為 j ，則 $n=10i+j$

命題： n 是9的倍數 $\Rightarrow i+j$ 是9的倍數

三種證明方法：

(正推) n 是9的倍數 $\Rightarrow n-9i$ 是9的倍數 $\Rightarrow i+j = n-9i$ 是9的倍數

(反證、逆推) $i+j$ 不是9的倍數 $\Rightarrow n-9i=i+j$ 不是9的倍數
 $\Rightarrow n$ 不是9的倍數，與假設矛盾，故 $i+j$ 是9的倍數

(窮舉) 符合假設的可能 (i,j) 有：

$(1,8), (2,7), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (7,2), (8,1), (9,0), (9,9)$

所有可能均滿足 $i+j$ 是9的倍數

歸納法：將 n 推廣至3位數、4位數.....

故事一：公儀休不受魚

春秋時代，公儀休擔任魯國的相國，以奉公守法聞名。公儀休愛吃魚，於是有客人送他魚：《史記·循吏列傳》

客有遺相魚者，相不受。客曰：「聞君嗜魚，遺君魚，何故不受也？」相曰：「以嗜魚，故不受也。今為相，能自給魚；今受魚而免，誰復給我魚者？吾故不受也。」

命題：嗜魚 \Rightarrow 不可受魚

證明：為相 \Rightarrow 有能力自給魚

（反證）受魚 \Rightarrow 不公正 \Rightarrow 免相 \Rightarrow 無力自給魚且無人送魚 \Rightarrow 無魚
與嗜魚者有魚的期望矛盾，故不可受魚。

此證明與前面數學實例的第二個證明邏輯相同，推理有滑坡謬誤

故事二：趙奢收平原君稅

戰國時代趙奢向平原君徵稅：《資治通鑑·卷五》

趙田部吏趙奢收租稅，平原君家不肯出。趙奢以法治之，殺平原君用事者九人。平原君怒，將殺之。趙奢曰：「君於趙為貴公子，今縱君家而不奉公，則法削，法削則國弱，國弱則諸侯加兵，是無趙也，君安得有此富乎？以君之貴，奉公如法則上下平，上下平則國強，國強則趙固，而君為貴戚，豈輕於天下邪！」平原君以為賢，言之於王。王使治國賦，國賦大平，民富而府庫實。

命題：縱容平原君不納稅 \Leftrightarrow 趙國亡

證明：平原君為趙國貴公子，無趙則無富貴

(正推) 縱容平原君不納稅 \Rightarrow 法削 \Rightarrow 國弱 \Rightarrow 諸侯加兵 \Rightarrow 無趙

(反證、逆推) 平原君納稅 \Rightarrow 上下平 \Rightarrow 國強 \Rightarrow 趙固

故事三：墨子救宋

戰國時，楚欲攻宋，墨子為救宋而兼程趕至楚國：《墨子·公輸》

子墨子見王，曰：「今有人於此，舍其文軒，鄰有敝輿，而欲竊之；舍其錦繡，鄰有短褐，而欲竊之；舍其梁肉，鄰有糠糟，而欲竊之。此為何若人？」王曰：「必為竊疾矣。」子墨子曰：「荊之地，方五千里，宋之地，方五百里，此猶文軒之與敝輿也；荊有雲夢，犀兕麋鹿滿之，江漢之魚鱉黿鼉為天下富，宋所為無雉兔狐貉者也，此猶梁肉之與糠糟也；荊有長松、文梓、楸枏、豫章，宋無長木，此猶錦繡之與短褐也。臣以三事之攻宋也，為與此同類……」

命題：楚攻宋 ⇒ 楚為慣竊

證明：（歸納）有豪華車卻偷鄰居破車，有華麗衣服卻偷鄰居破衣，有美食卻偷鄰居糟糠 ⇒ 此人是慣竊

所以，富饒廣袤的楚國欲攻得貧瘠地狹的宋國 ⇒ 楚國是慣竊

邏輯推理3：Monty Hall Problem (S.Selvin 1975)

假設你參加一個猜獎遊戲，三扇門中有一扇門後面有獎品。你選中了一扇門(假設是1號門)，尚未打開它。這時，主持人為了增加懸念，先打開了剩餘兩扇中沒有獎品的一扇(主持人事先知道獎品在哪，假設他打開了3號)。現在，你獲得了一次改變最初選擇的機會，你可以繼續選擇1號，也可以改選2號。請問，你該不該換？

邏輯推理3：Monty Hall Problem (S.Selvin 1975)

假設你參加一個猜獎遊戲，三扇門中有一扇門後面有獎品。你選中了一扇門(假設是1號門)，尚未打開它。這時，主持人為了增加懸念，先打開了剩餘兩扇中沒有獎品的一扇(主持人事先知道獎品在哪，假設他打開了3號)。現在，你獲得了一次改變最初選擇的機會，你可以繼續選擇1號，也可以改選2號。請問，你該不該換？

答案：應該改選2號。

用正向推理證明命題：「不換」之得獎機率小於「換」

不換 \Rightarrow 需一開始選對才得獎 \Rightarrow 不換的得獎機率為 $1/3$

\Rightarrow 換的得獎機率為 $1-1/3=2/3$

Recommended Readings (👉 Required)



1. “Sleeping Beauty Paradox”

<https://www.youtube.com/watch?v=XeSu9fBJ2sI>

2. 維基百科條目「思維規律」、「推理」、「經典邏輯」、「傳統邏輯」