

數理思維

第十二講：有公平的選舉嗎？

選慶生蛋糕

假設明晚同學們要幫一位同學慶生，大家為了選蛋糕爭執不下，有三種口味的蛋糕可選：水果、巧克力、乳酪

大家依個人喜好順序投票，結果如下：

票數	喜好順序
6	乳酪、水果、巧克力
5	巧克力、水果、乳酪
4	水果、巧克力、乳酪

撇開你的個人喜好，你覺得選哪一種蛋糕比較公平？

選慶生蛋糕

依照絕對多數決(投一票)，乳酪獲選

依照相對多數決(投兩票)，水果獲選

依照排序複選制(投一票)，巧克力獲選

票數	喜好順序
6	乳酪、水果、巧克力
5	巧克力、水果、乳酪
4	水果、巧克力、乳酪

問題：到底哪一種方式才是比較「民主」的？

註：「排序複選制」英文為Instant-runoff voting，簡寫為IRV，指無人過半時淘汰最低票者，並重複此程序直到有人過半。澳洲國會、愛爾蘭總統、許多美國州郡法官選舉等等，即採用此選舉方式。

Borda計分法

法國數學與哲學家Marquis de Condorcet (1743-1794)試圖提出絕對公平的選舉方法以及公平選舉的判準，其方法並不完備但是他提出的判準至今仍有很好的參考價值。法國數學與物理學家Jean Charles de Borda (1733-1799)提出一個相對公平選舉的方法，這是一種加權計分法：若有 n 個候選人，他提議投票者對自己最不喜歡到最喜歡的候選人依序給0到 $n-1$ 分，最後累積得分最高的人贏得選舉。

依照Borda計分法，哪一項蛋糕獲選？



Photos of Condorcet(up) and Borda(down) from Wikipedia

Borda計分法

調整一下前面的例子，如右表所示。這次你覺得選哪一種蛋糕比較公平？

票數	喜好順序
6	乳酪、水果、巧克力
2	巧克力、水果、乳酪
3	水果、巧克力、乳酪

依照Borda計分法，哪一項蛋糕獲選？

這個例子反應出Borda計分法的一項潛在缺點，就是即便多數人選為第一，也不一定能被選中！

Nanson計分法

一種類似Borda計分法的投票法由英國數學家 Edward John Nanson (1850-1936) 發明，方法是排除低於 Borda 計分法平均值的候選人，然後重複 Borda 計分法，直到只剩一人。

Nanson計分法的一個特質是，如果某個候選人被多數人選為第一，他的Borda 計分永遠高於平均，所以最後一定被選出。



Photo of E.J. Nanson
from Wikipedia

選學生會長

假設現有四位學生會長候選人，A、B、C、D，應選出一人。依照投票人喜好順序，其人數比例為：

依照投一票絕對多數決，A獲選

依照投兩票相對多數決，B獲選

依照投三票相對多數決，C獲選

依照 Borda計分法，D獲選

票數比	喜好順序
2	A>B>C>D
2	C>B>D>A
2	A>D>C>B
3	D>B>C>A

到底哪一種方式才是比較「民主」的？

啟示：當比數接近，是選舉制度決定了獲勝者！

實例：2000美國大選

美國2000年大選的最後得票：

George W. Bush	50,456,002 (47.87%)	(271選舉人票)
Albert Gore, Jr.	50,999,897 (48.38%)	(266選舉人票)
Ralph Nader	2,882,955 (2.74%)	

依照絕對多數決，Gore獲勝

依照投兩票相對多數決（根據民調），Gore獲勝

在關鍵的佛羅里達州(29張選舉人票)，Bush贏了0.0092%

這種關鍵少數影響全局的現象稱為「spoiler effect」，亦被稱為「Nader Factor」



Photos of Bush, Gore, Nader from Wikipedia

實例：2016美國大選

美國2016年大選的最後得票：

Donald J. Trump	62,984,828 (46.09%)	(304選舉人票)
Hillary D. R. Clinton	65,853,514 (48.18%)	(227選舉人票)
Gary E. Johnson	4,489,341 (3.28%)	
Jill Ellen Stein	1,457,218 (1.07%)	

依照絕對多數決，Hillary Clinton獲勝

依照各方民調，Hillary Clinton獲勝

Trump以<1%優勢勝出的州: 賓州、威斯康辛、密西根



Photos of Bush, Gore,
Nader from Wikipedia

選舉方式判別法

有真正「民主」或「忠實反映民意」的選舉嗎？
一個好的選舉方式應具有哪些要件？

以下我們列舉幾種判斷選舉方式優劣的判別法

Condorcet判別法: 若某一候選者在任何一組捉對廝殺的選舉中都勝出，則稱之為Condorcet勝者。若一選舉方式在Condorcet勝者存在的前提下必然將其選出，則稱此方法滿足Condorcet判別法。

Condorcet輸家判別法: 若某一候選者在任何一組捉對廝殺的選舉中都輸，則稱之為Condorcet輸家。若一選舉方式永遠不會選出Condorcet輸家，則稱此方法滿足Condorcet輸家判別法。

選舉方式判別法

參與判別法(participation criterion): 若一選舉方式在A勝過B的前提下，加一張A勝過B的選票不能改變A勝過B的結果，則稱此方法滿足參與判別法。

多數判別法(majority criterion): 若一選舉方式在A支持度過半數的前提下，A必然獲勝，則稱此方法滿足多數判別法。

反轉對稱判別法: 若候選者A勝出，在所有投票者偏好順序都反轉的情形下，A不能仍是勝利者。若一選舉方式滿足此條件，則稱此方法滿足反轉對稱判別法。

選舉方式判別法

絕對多數決、相對多數決、排序複選制不滿足的判別法
都包括：Condorcet, Condorcet輸家, 反轉對稱

Borda計分法不滿足的判別法包括：Condorcet, 多數...
(可拿的「蛋糕選舉」和「學生會長選舉」當反例)

事實上，沒有任何選舉方式能同時滿足所有判別法！

我們必須對判別法先達成共識，但如何達成共識？

投票嗎？怎麼投票？這讓我們陷入一個邏輯的迴圈...

選舉方式判別法

許多選舉並非只選一人，需要對候選人進行排序，下面兩個判別法概念上類似Condorcet的兩個判別法與參與判別法：

一致性(unanimity): 如果所有選舉人都將A排在B前，則最後投票結果A必需排在B前。

獨立於無關選項(independence of irrelevant alternatives): 假設投票結果A勝過B，若一些選舉人改變投票意向，但不改變對A和B的排序，則最後投票結果仍然是A勝過B。

假民主

投票是實踐民主的程序，但是如果投票結果根本不能影響排序，那就是假民主。一般認為假民主在一黨專政的國家最普遍，其實在號稱民主的多黨制國家也不少（包括臺灣！）

獨裁(dictatorship): 存在某個選舉人，無論其他人的投票意向為何，此人的投票意向必定與與最終結果相同。

若有獨裁者，民主就是假的，投票只是美化獨裁者的工具。

設計選舉制度

假設有三個候選人A、B、C，四個選舉人P、Q、R、S。右邊的表格由左至右顯示他們的投票意向。

問題：如何設計一個公平合理的選舉制度？

投票意向1			
P	A	B	C
Q	A	C	B
R	B	C	A
S	C	B	A

投票意向2			
P	A	B	C
Q	A	C	B
R	C	B	A
S	C	B	A

設計選舉制度

現在假設我們採取了某種“優良”的計分方式，它符合「一致性」與「獨立於無關選項」兩項判準。

投票意向1			
P	A	B	C
Q	A	C	B
R	B	C	A
S	C	B	A

投票意向2			
P	A	B	C
Q	A	C	B
R	C	B	A
S	C	B	A

分析計分方式

觀察一：A必定是第一或最後

假設不對，那有兩種可能：BAC或CAB。
右上圖列舉其中一種原始投票意向。

假設是BAC，根據「獨立於無關選項」，
若將所有選舉人的投票意向維持或變為C
在B前，其餘不動（右中），既不能改變
A、B的排序，也不能改變A、C的排序，
結果只能是BAC；但根據「一致性」，新
的投票意向C必須在B前面，與假設不符。

原始投票意向			
P	A	B	C
Q	A	C	B
R	B	C	A
S	C	B	A

新的投票意向			
P	A	C	B
Q	A	C	B
R	C	B	A
S	C	B	A

新的投票意向			
P	A	B	C
Q	A	B	C
R	B	C	A
S	B	C	A

分析計分方式

假設是CAB，根據「獨立於無關選項」，若將所有選舉人的投票意向維持或變為C在B前，其餘不動（右下），既不能改變A、B的排序，也不能改變A、C的排序，結果只能是CAB；但根據「一致性」，新的投票意向B必須在C前面，與假設不符。

推廣上述討論，可得較具一般性的結論：
極值引理：如果某個候選人在選舉人的投票意向中不是第一就是最後，那選舉結果他不是第一就是最後

原始投票意向			
P	A	B	C
Q	A	C	B
R	B	C	A
S	C	B	A

新的投票意向			
P	A	C	B
Q	A	C	B
R	C	B	A
S	C	B	A

新的投票意向			
P	A	B	C
Q	A	B	C
R	B	C	A
S	B	C	A

分析計分方式

現在假設A是第一。另一種情況（A是最後）的討論類似。

根據「極值引理」，若將Q的投票意向改為A在最後（右中），選舉結果A不是第一就是最後。根據「獨立於無關選項」，此時再調整任何人對B、C的排序，都不影響A的排序。換句話說，若用X表示任意候選人，右下的投票意向表不影響A的最終排序。

如果A仍然是第一，稱P為**關鍵選舉人**，若A變為最後，稱Q為**關鍵選舉人**。

原始投票意向			
P	A	B	C
Q	A	C	B
R	B	C	A
S	C	B	A

新的投票意向			
P	A	B	C
Q	C	B	A
R	B	C	A
S	C	B	A

新的投票意向			
P	A	X	X
Q	X	X	A
R	X	X	A
S	X	X	A

觀察二：關鍵選舉人對二三名的排序有決定權

假設P是關鍵選舉人，其投票意向為(1)。Q是關鍵選舉人的討論類似。

投票意向(1)			
P	A	B	C
Q	X	X	X
R	X	X	X
S	X	X	X

將除P外的選舉人對A的排序挪到最後，如(2)所示；接下來將P的A、B順序互換，如(3)所示。圖中只挪動A。

投票意向(2)			
P	A	B	C
Q	X	X	A
R	X	X	A
S	X	X	A

因為P是關鍵選舉人，所以(2)的結果一定是A在C前。根據「獨立於無關選項」，(3)的結果也是A在C前。根據「一致性」，(3)的結果一定是B在A前，所以(3)的結果是BAC。

投票意向(3)			
P	B	A	C
Q	X	X	A
R	X	X	A
S	X	X	A

比較(1)和(3)，根據「獨立無關選項」，(1)的結果一定也是B在C前，與P對B、C的排序相同。

觀察三：關鍵選舉人是獨裁者

仍然假設P是關鍵選舉人，其投票意向為(1)。Q是關鍵選舉人的討論類似。

根據觀察二，我們只需證明最終排序是A第一即可。將P的C順位改為第一，其他人則將C挪到最後，如(2)所示。因為P是關鍵選舉人，所以(2)的結果是C第一。根據觀察二，(2)的結果是A在B前，所以最終是CAB。比較(1)和(2)，根據「獨立於無關選項」，(1)的結果一定也是A在B前。

與上面討論類似，將B與C的角色互換，如(3)所示，可得(1)的結果一定是A在C前，得證！

投票意向(1)			
P	A	B	C
Q	X	X	X
R	X	X	X
S	X	X	X

投票意向(2)			
P	C	A	B
Q	X	X	C
R	X	X	C
S	X	X	C

投票意向(3)			
P	B	A	C
Q	X	X	B
R	X	X	B
S	X	X	B

沒有完美的選舉制度

我們前面的分析，包含了下面（令人驚訝的）定理證明中的主要思想：

Arrow不可能性定理 (Kenneth Arrow, 1951~2017):
有 n (>2)個候選人，若干個選舉人，每個選舉人都對這 n 個候選人有一個從優至劣的排序。如果一個選舉法則滿足「一致性」與「獨立於無關選項」，那麼一定有獨裁者。

推論：民主的制度必須犧牲「獨立於無關選項」



Photo of K. Arrow from Wikipedia

沒有完美的選舉制度

Arrow的定理可以被用來證明下面的定理：

Gibbard–Satterthwaite定理: (Gibbard 1973, Satterthwaite 1975)

有 n (>2)個候選人，若干個選舉人，每個選舉人都對這 n 個候選人有一個從優至劣的排序。任何選舉法則必定滿足下面三個條件之一：

- (1) 有獨裁者；
- (2) 有人不可能被選上；
- (3) 有策略性投票的動機。

啟示：不存在完美的民主制度，策略性投票的難以避免

Recommended Readings (👉 Required)

- 👉 1. Mark Buchanan: “The Social Atom - Why the Rich Get Richer, Cheaters Get Caught, and Your Neighbor Usually Looks Like You”, Bloomsbury USA, 2007.
(中譯本名稱: 《隱藏的邏輯》, 天下遠見, 2007.) 第九章
2. Stanford Encyclopedia of Philosophy條目 「Arrow's Theorem」
<https://plato.stanford.edu/entries/arrows-theorem/>
3. John Geanakoplos, “Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem,”
Economic Theory 26, 2005
4. Joseph Malkevitch, “The Process of Electing a President”, Monthly essays on
mathematical topics, American Mathematical Society, 2016.
<http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-elections>
5. David Easley, Jon Kleinberg, “Networks, Crowds, and Markets: Reasoning
About a Highly Connected World”, Cambridge University Press, 2010. Chap 23
<https://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/networks-book/networks-book-ch23.pdf>
6. “Why Democracy Is Mathematically Impossible” by Veritasium
<https://www.youtube.com/watch?v=qf7ws2DF-zk&list=PLVNADpGn6GBV6OV3NbOtx1CNITOIYj3mKz&index=5>