

2013 秋 動機系微積分 期中考解答暨評分標準  
(第 1、2、7 題)

周伯欣助教

2013 年 12 月 2 日

### 第 1 題

**題目** : Use  $\varepsilon$ - $\delta$  to prove  $\lim_{x \rightarrow c} |x| = |c|$ .

**解答** :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0$  such that if  $0 < |x - c| < \delta$ , then  $||x| - |c|| \leq |x - c| < \delta = \varepsilon$ .

**要點** :

1.  $\varepsilon$  與  $\delta$  弄反，寫成  $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon \dots$ ，此情況發生者扣 10 分。
2.  $\forall \varepsilon > 0$  寫成  $\forall x > 0$ ，此情況發生者扣 10 分。
3. 未具體求出  $\delta$  或是給出  $\delta$  需滿足的不等式 ( $\delta \leq \varepsilon$ )，而全文僅有此處錯誤，此情況發生者扣 5 分。
4. 僅背誦定義  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  such that if  $0 < |x - c| < \delta$ , then  $||x| - |c|| < \varepsilon$ ，未確切求出  $\delta$  或是給出  $\delta$  需滿足的不等式，且未使用三角不等式，此情況發生者扣 10 分。
5.  $0 < |x - c| < \delta$  漏寫  $0 <$ ，而全文僅有此處錯誤，此情況發生者扣 3 分。
6. 作答過程僅寫「見講義 1.5.2」，此情況發生者扣 10 分。
7. 三角不等式  $||x| - |c|| \leq |x - c|$  中的  $\leq$  寫作  $<$ ，劃線標明但不扣分。
8. 英文單字拼寫錯誤，劃線標明但不扣分。
9. 國字寫錯、注音拼錯，劃線標明但不扣分。

## 第 2 題

**題目：** Prove that if  $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$  is continuous, then there exists  $c \in (0, 1)$  such that  $f(c) = c$ .

**解答：** 令函數  $F(x) = f(x) - x$ ，因為  $y = f(x)$  與  $y = x$  都是  $[0, 1]$  上的連續函數，所以由 sum rule 可知  $y = F(x)$  也是  $[0, 1]$  上的連續函數。

因為  $F(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$ ,  $F(1) = f(1) - 1 < 0$ ，所以由中間值定理 (intermediate value theorem) 可知： $\exists c \in (0, 1)$  使得  $F(c) = 0$ ，而  $F(c) = f(c) - c$ ，所以有  $f(c) = c$ 。

**要點：**

1. 自行假設函數  $f(x) = \cos x$ ，此情況發生者扣 7 分。
2. 未具體給出  $F(x) = f(x) - x$ ，僅寫  $F(x)$ ，而其餘過程正確，此情況發生者扣 7 分。
3. 用「連續函數的合成函數仍是連續函數」說明  $F(x)$  是連續函數，而其餘過程正確，此情況發生者扣 3 分。
4. 用「 $F(x)$  在  $(0, 1)$  上是可微的」說明  $F(x)$  是連續函數，而其餘過程正確，此情況發生者扣 4 分。
5. 未使用 sum rule 說明  $F(x)$  是連續函數，而其餘過程正確，此情況發生者扣 3 分。
6. 未計算  $F(0), F(1)$  之符號，而其餘過程正確，此情況發生者扣 3 分。
7. 未寫出「中間值定理 (intermediate value theorem)」(不論中、英文)，且未引用任何定理，此情況發生者扣 3 分。
8. 引用「勘根定理」，不扣分。
9. 引用「均值定理 (mean value theorem)」，而其餘過程正確，此情況發生者扣 5 分。
10. 結論處  $F(c)$  寫作  $F'(c)$ ，而其餘過程正確，此情況發生者扣 3 分。
11. 英文單字拼寫錯誤，劃線標明但不扣分。
12. 國字寫錯、注音拼錯，劃線標明但不扣分。

### 第 3 題

**題目** : Prove that if  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \neq 0$ , and  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ , then  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  does not exist.

**解答** : 用反証法。假定  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  存在, 極限值為  $M$ 。那麼由 product rule 可知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \left[ g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} g(x) \times \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= 0 \times M \\ &= 0.\end{aligned}$$

但已知  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \neq 0$ , 得矛盾。故原假設錯誤, 即  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  不存在。

**要點** :

1. 自行假設函數  $f(x) = x + 1, g(x) = x$  或是其他形式的函數 (如多項式函數), 用特例論證, 此情況發生者扣 10 分。
2. 「因為  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ , 所以不能用 quotient rule (或 reciprocal rule), 故所求極限不存在」, 此情況發生者扣 10 分。
3. 「因為  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = \infty$ 」, 此情況發生者扣 10 分。
4. 「因為  $\frac{L}{0} = \infty$ 」, 此情況發生者扣 10 分。
5. 「因為  $\frac{L}{0}$  無意義, 所以  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  不存在。」此情況發生者扣 10 分。
6. 「因為  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{0} = \infty$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  不存在。」此情況發生者扣 10 分。
7. 使用  $\varepsilon - \delta$  論證, 但逆否敘述寫錯, 此情況發生者扣 10 分。
8. 使用  $\varepsilon - \delta$  論證, 但未做出不等式估計, 此情況發生者扣 10 分。
9. 思路正確, 但未寫明使用 product rule 或是跳步過多, 此情況發生者扣 3 分。
10. 思路正確, 但將 product rule 錯植為 quotient rule, 此情況發生者扣 3 分。
11. 英文單字拼寫錯誤, 劃線標明但不扣分。
12. 國字寫錯、注音拼錯, 劃線標明但不扣分。