

命題:

對於任意 $\varepsilon > 0$, 皆存在 $\delta > 0$, 使得:

$$\text{當 } 0 < |x-c| < \delta \text{ 時, } |f(x)-L| < \varepsilon \quad \text{--- (*)}$$

(1) 如何證明上述命題成立? 原則上需要說明如何由 ε 找 δ . 這個答案一般來說當然跟 f 及 c 都有關. 例如: δ 可能是 $\frac{\varepsilon}{2}$, 可能是 $\min(\varepsilon, 1)$, 或是任意正實數皆滿足.

例: (1) $f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

(2) $f(x) = x$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = c$

(3) ~~$f(x)$~~ $\lim_{x \rightarrow 6} x^2 = 36$

(2) 如何證明上述命題不成立?

此時需要找出某一個 $\varepsilon > 0$ (順的把它找出來!) 說明對於這個 ε , 無論 $\delta > 0$ 取得多麼小 (*) 都不會成立!

例: (4): $f(x) = \lfloor x \rfloor$, 證明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 不成立

(3) 如何證明 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 不存在?

此時需要說明對於任意的實數 L , 上述命題皆不成立, 如例 (4) 中, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在